

Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
17.01.2013

Zu Markov-Prozessen:

Bemerkungen:

Wir betrachten im Folgenden eine Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, wobei jedes X_n Werte in $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$ annehmen kann.

1. Wenn man die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n]$$

betrachtet, wobei $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in \mathcal{Z}$, so nennt man

- (a) $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$ Vergangenheit,
 - (b) i_n Gegenwart,
 - (c) i_{n+1} Zukunft.
2. Die Entwicklung des Prozesses $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ hängt also nur von der Gegenwart i_n ab, jedoch **nicht** von der Vergangenheit!
Mit anderen Worten: die Wahrscheinlichkeit im n -ten Schritt von i_n nach i_{n+1} ist unabhängig davon, wie man in n Schritten zum Zustand i_n gekommen ist.
3. Man nennt die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n] \quad \textbf{\u00dcbergangswahrscheinlichkeiten.}$$

Diese h\u00e4ngen nur von 3 Variablen dabei: n, i_n, i_{n+1} .

4. Die Wahrscheinlichkeit, da\u00df man eine bestimmte Folge von Punkten $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{Z}^{n+1}$ mit der Markovkette in genau dieser Reihenfolge durchwandert, kann mit Hilfe der \u00dcbergangswahrscheinlichkeiten (unter Verwendung der Rechenregeln f\u00fcr bedingte Wahrscheinlichkeiten und mittels vollst\u00e4ndiger Induktion beweisend) wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] \\ &= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0] \\ &= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1] \\ &= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_2 = i_2 \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1] \cdot \\ & \quad \cdot \mathbb{P}[X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2] \\ &= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdot \\ & \quad \cdot \mathbb{P}[X_2 = i_2 \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] \\ &= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdot \\ & \quad \cdot \mathbb{P}[X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}]. \end{aligned}$$

Definition:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$.

1. Hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n]$ **nicht** von n ab, so heißt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ **homogene Markovkette**.
Wir schreiben dann für alle $i, j \in \mathcal{Z}$:

$$p_{ij} = p(i, j) := \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = \mathbb{P}[X_1 = j \mid X_0 = i]$$

2. **Übergangsmatrix:**

$$P = (p_{ij})_{i, j \in \mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0s} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{s0} & p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{pmatrix} \quad (s+1) \times (s+1)\text{-Matrix}$$

Wichtig: die Zeilensummen sind stets 1, d.h.

$$\sum_{j=0}^s p_{ij} = 1 \quad \forall i \in \mathcal{Z}.$$

3. **n-stufige Übergangswahrscheinlichkeiten:** für $i, j \in \mathcal{Z}$:

$$p_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i]$$

4. **Verteilung von X_n :** für $i \in \mathcal{Z}$:

$$p_i^{(n)} = \mathbb{P}[X_n = i]$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, daß man sich zur Zeit n im Zustand i befindet. Man kann diese Wahrscheinlichkeiten zu einem Vektor in $\mathbb{R}^{s+1}$ zusammenfassen:

$$\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_s^{(n)}).$$

5. **Anfangsverteilung/Startverteilung:**

$$\mathbf{p}^{(0)} = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_s^{(0)}),$$

wobei für $i \in \mathcal{Z}$

$$p_i^{(0)} = \mathbb{P}[X_0 = i].$$

Bemerkung: Oft ist für X_0 ein fester Wert vorgeben, so daß $\mathbf{p}^{(0)}$ an genau einer Stelle eine 1 stehen hat und 0 an den übrigen Stellen.

Satz: (Chapman-Kolmogorov-Gleichung)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit der Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{Z}}$, wobei $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$. Ferner sei P^0 die $(s+1) \times (s+1)$ -Einheitsmatrix bzw. P^n die n -te Potenz von P . Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{n+m} &= \sum_{k=0}^s p_{ik}^n \cdot p_{kj}^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0, \quad \forall i, j \in \mathcal{Z} \\ P^{n+m} &= P^n \cdot P^m \quad (\text{Matrizenprodukt!}) \end{aligned}$$

Beispiel:

Man betrachte eine homogene Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$. Es seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$\begin{aligned} p(0, 0) &= \frac{1}{3}, \quad p(0, 1) = p(1, 1) = p(2, 2) = 0, \\ p(1, 0) &= \frac{1}{4}, \quad p(2, 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1. Stellen Sie die Übergangsmatrix auf und zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
2. Man berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_3 = 0 \mid X_0 = 1]$.

Definition:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit der Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{Z}}$, wobei $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$.

1. Der Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **absorbierend**, falls $p_{ii} = 1$. (D.h., landet man einmal im Zustand i , kommt man von dort nicht mehr weg.)
2. Der **Rand** R der Markovkette besteht aus der Menge aller absorbierenden Zustände, d.h.

$$R = \{i \in \mathcal{Z} \mid p_{ii} = 1\}.$$

3. Die Menge der **inneren Zustände** der Markovkette ist die Menge aller Nicht-Randpunkte $\mathcal{Z} \setminus R$.
4. Die Markovkette heißt **absorbierend**, falls $R \neq \emptyset$ und R von *jedem* inneren Zustand in endlich vielen Schritten erreicht werden kann.

Definition:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene, absorbierende Markovkette mit der Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{Z}}$, wobei $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$. Sei $T \subseteq R$ und $i \in \mathcal{Z}$.

1. $P_i(T)$ sei die **Absorptionswahrscheinlichkeit**, daß man nach endlicher Zeit die Menge T erreicht ausgehend vom Zustand i . D.h. diese ist die Wahrscheinlichkeit, daß man vom Zustand i ausgehend in die Menge T absorbiert wird.
2. m_i sei die **erwartete Anzahl von Schritten**, um ausgehend vom Zustand i in den Rand R zu kommen.

Lemma:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene, absorbierende Markovkette mit der Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{Z}}$, wobei $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$. Sei $T \subseteq R$ und $i \in \mathcal{Z}$.

1. Für jede Absorptionswahrscheinlichkeit gilt:

$$P_i(T) = \sum_{j=0}^s p_{ij} P_j(T),$$

wobei $P_j(T) = 1$, falls $j \in T$, und $P_j(T) = 0$, falls $j \in R \setminus T$.

2. Erwartete Schrittzahl bis zur Absorption:

$$m_i = \begin{cases} 1 + \sum_{j=0}^s p_{ij} m_j, & \text{falls } i \in \mathcal{Z} \setminus R, \\ 0, & \text{falls } i \in R. \end{cases}$$

Beispiel zu Absorptionswahrscheinlichkeiten:

Roulette-Beispiel: Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und folgenden Übergängen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{n+1} = i + 1 | X_n = i] &= \frac{18}{37} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = i - 1 | X_n = i] &= \frac{19}{37} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 | X_n = 0] &= \mathbb{P}[X_{n+1} = 4 | X_n = 4] = 1.\end{aligned}$$

Anfangsverteilung: $p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0)$, d.h. $\mathbb{P}[X_0 = 2] = 1$.

Der Rand ist $R = \{0, 4\}$.

Interpretation: Ein Spieler mit Startkapital 2 Euro setzt solange einen Euro auf Rot in jeder Spielrunde, bis er entweder seine 2 Euro verspielt hat oder seinen Einsatz auf 4 Euro verdoppelt hat.

Setze $T = \{0\} = R$. Berechne Absorptionswahrscheinlichkeit von T , sowie die erwartete Anzahl von Schritten, bis der Zustand 0 erreicht wird.

1. Absorptionswahrscheinlichkeit: Wende Lemma 13.1.7 (1) an:

$$\begin{aligned}P_0(\{0\}) &= 1 \\ P_1(\{0\}) &= \frac{19}{37}P_0(\{0\}) + \frac{18}{37}P_2(\{0\}) \\ P_2(\{0\}) &= \frac{19}{37}P_1(\{0\}) + \frac{18}{37}P_3(\{0\}) \\ P_3(\{0\}) &= \frac{19}{37}P_2(\{0\}) + \frac{18}{37}P_4(\{0\}) \\ P_4(\{0\}) &= 0\end{aligned}$$

Die erste und letzte Gleichung eingesetzt vereinfacht das lineare Gleichungssystem zu:

$$\begin{aligned}P_1(\{0\}) &= \frac{19}{37} + \frac{18}{37}P_2(\{0\}) \\ P_2(\{0\}) &= \frac{19}{37}P_1(\{0\}) + \frac{18}{37}P_3(\{0\}) \\ P_3(\{0\}) &= \frac{19}{37}P_2(\{0\})\end{aligned}$$

Lösen dieses linearen Gleichungssystems in den Unbekannten $P_1(\{0\})$, $P_2(\{0\})$, $P_3(\{0\})$ ergibt

$$P_1(\{0\}) = 0.7699, P_2(\{0\}) = 0.5270, P_3(\{0\}) = 0.2706.$$

D.h. die Wahrscheinlichkeit, daß alles verspielt wird, wenn man mit Kapital 2 Euro startet ist gleich 52,7%.

2. Erwartete Anzahl der Spiele bis Totalverlust entsteht oder bis man 4 Euro hat:
 m_i = Erwartete Anzahl der Spiele bis Totalverlust entsteht oder 4 Euro Kapital erspielt wurden, wenn man mit Kapital i Euro startet.

Wir wenden Lemma 13.7.1 (2) an:

$$\begin{aligned}m_0 &= 0 \\m_1 &= 1 + \frac{19}{37}m_0 + \frac{18}{37}m_2 \\m_2 &= 1 + \frac{19}{37}m_1 + \frac{18}{37}m_3 \\m_3 &= 1 + \frac{19}{37}m_2 + \frac{18}{37}m_4 \\m_4 &= 0\end{aligned}$$

Die erste und letzte Gleichung eingesetzt vereinfacht das lineare Gleichungssystem zu:

$$\begin{aligned}m_1 &= 1 + \frac{18}{37}m_2 \\m_2 &= 1 + \frac{19}{37}m_1 + \frac{18}{37}m_3 \\m_3 &= 1 + \frac{19}{37}m_2\end{aligned}$$

Lösen dieses linearen Gleichungssystems in den Unbekannten m_1, m_2, m_3 ergibt

$$m_1 = 2.945, m_2 = 3.997, m_3 = 3.053.$$

D.h. wenn der Spieler mit 2 Euro Kapital beginnt, ist zu erwarten, daß der Spieler durchschnittlich nach $m_2 = 3.997$ Spielen entweder einen Totalverlust erlitten hat oder 4 Euro Kapital erspielt hat.