Folie zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse"
24.01.2013

Klassifikation der Zustände:

Definitionen:

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, s\} \subseteq \mathbb{N}$.

1. Der Zustand $j \in \mathcal{Z}$ heißt **erreichbar** von $i \in \mathcal{Z}$, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i] > 0$, d.h. falls im Übergangsgraphen ein Weg von i nach j existiert.
2. Die Markovkette heißt **irreduzibel**, falls für alle $i, j \in \mathcal{Z}$ gilt, daß i von j <u>und</u> j von i erreichbar sind.
3. Eine Menge $C \subseteq \mathcal{Z}$ heißt **abgeschlossen**, falls man von keinem $i \in C$ zu einem Zustand $j \in \mathcal{Z} \setminus C$ kommt, d.h. falls im Übergangsgraphen kein Weg von C rausführt.

Definitionen:

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, s\} \subseteq \mathbb{N}$.

1. Sei $i \in \mathcal{Z}$ und
$$M_i := \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, p_{ii}^{(n)} > 0\right\}.$$
Die **Periode** von $i \in \mathcal{Z}$ ist
$$d_i := \begin{cases} \mathrm{ggT}(M), & \text{falls } M \neq \emptyset, \\ 0, & \text{falls } M = \emptyset. \end{cases}$$
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt **aperiodisch**, falls jeder Zustand die Periode 1 besitzt.
3. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt **regulär**, falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aperiodisch und irreduzibel ist.

Definitionen:

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, s\} \subseteq \mathbb{N}$.

1. Die **Wahrscheinlichkeit der ersten Rückkehr** zum Zustand $i \in \mathcal{Z}$ zur Zeit $n \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$f_i^{(n)} := \begin{cases} \mathbb{P}\big[X_n = i, \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} : X_k \neq i \mid X_0 = i\big], & \text{falls } n \geq 1, \\ 1, & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

2. **Rückkehrwahrscheinlichkeit** zum Zustand $i \in \mathcal{Z}$:

$$f_i := \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)}.$$

3. Ein Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **rekurrent**, wenn $f_i = 1$, d.h. wenn er mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder besucht wird.

4. Ein Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **transient**, wenn $f_i < 1$, d.h. wenn er mit positiver Wahrscheinlichkeit (nämlich $1 - f_i$) nie wieder besucht wird.

5. Falls der Zustand $i \in \mathcal{Z}$ rekurrent ist, dann ist die Rückkehrzeit T_i eine Zufallsvariable mit mittlerer Rückkehrzeit (=Erwartungswert)

$$m_i = \mathbb{E}T_i = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_i^{(n)}.$$

6. Ein rekurrenter Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **positiv rekurrent**, falls $m_i < \infty$.

7. Ein rekurrenter Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **null-rekurrent**, falls $m_i = \infty$.

8. Ein Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **ergodisch**, falls er aperiodisch und positiv rekurrent ist, d.h. falls $d_i = 1$ und $m_i < \infty$.