Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

Prüfung aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse
27. 06. 2008
Stoffsemester: WS 2007/2008

---

1. Eisverkäufer Rinaldo besitzt in seiner Eisdiele zwei Eistheken, in denen jeweils 10 Behälter mit verschiedenen Eissorten untergebracht werden können. Es sollen nun 15 Eisbehälter auf die zwei Theken verteilt werden. (5 Pkt.)

   (a) Wie viele Möglichkeiten zur Aufteilung der Behälter auf die verschiedenen Theken gibt es, wenn die Theken und die Eisbehälter unterscheidbar sind?

   (b) Rinaldo stellt 8 Milcheissorten sowie 7 Fruchteissorten her. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, die erste Theke vollständig zu füllen, sofern die Eisbehälter nur nach Milch-/Fruchteissorte unterschieden werden?

2. In einer Fabrik werden Metallteile hergestellt, welche durchschnittlich 15kg wiegen. Es werde angenommen, daß das Gewicht eines zufällig ausgewählten Metallteils normalverteilt sei mit $\sigma^2 = 0,25$. (8 Pkt.)

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewähltes Metallteil ein Gewicht zwischen $14,8$kg und $15,3$kg?

   (b) Es werden nun 10 Metallteile aus dem Lager zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 Metallteile ein Gewicht von mindestens $15,5$kg besitzen?

   (c) Eine Lieferung besteht aus 50 Metallteilen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens 10 Metallteile ein Gewicht von mindestens $15,5$kg besitzen? Verwenden Sie dazu eine geeignete Approximation!

3. Man betrachte folgende Funktion, wobei $c \in \mathbb{R}$: (9 Pkt.)

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x^3 + x + 2), & \text{falls } 0 < x^2 < y < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie c so, dass $f(x,y)$ eine Dichtefunktion eines zweidimensionalen Zufallsvektors (X,Y) ist.

   (b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$.

   (c) Sind X und Y unabhängig?

Bitte wenden!

4. Die Anzahl der gelben Karten in einem Spiel (90 Minuten) der Fußball-Europameisterschaft werde durch einen POISSON-Prozeß modelliert. Im Durchschnitt bekommen pro Spiel 4 Spieler eine gelbe Karte. (9 Pkt.)

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen bis zur 20.Spielminute genau zwei Spieler eine gelbe Karte?

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt bis zur Halbzeitpause (45 Minuten) genau 1 Spieler eine gelbe Karte, zwischen 45.Minute und 60.Minute genau 2 Spieler eine gelbe Karte und nach der 60.Minute genau 1 Spieler eine gelbe Karte?

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird vor der Halbzeitpause die zweite gelbe Karte des Spiels gezeigt?

   (d) Was ist die erwartete Spielminute, zu welcher die erste gelbe Karte des Spiels gezeigt wird?

5. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0,1,2\}$, wobei folgende Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sind: (9 Pkt.)

$$p(0,0) = \frac{1}{4},\ p(0,2) = p(1,1) = p(2,0) = p(2,2) = 0,\ p(1,0) = \frac{1}{3}.$$

   (a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an. Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_3 = 1 \mid X_0 = 0]$.

   (b) Ist der Zustand 0 rekurrent?

   (c) Berechnen Sie die Grenzverteilung dieser Markovkette, und daraus die erwartete Rückkehrzeit zum Zustand 2, falls $X_0 = 2$.

ALLE ZWISCHENSCHRITTE SIND ANZUGEBEN!