Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2019/2020

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

2. Übungsblatt (15. Oktober 2019)

Beispiel 4 **(2 Punkte)**
Wir betrachten das Computerspiel aus **Beispiel 1** mit dem Ereignisraum $\Omega = \{N, O, S, W\}$. Anstatt für jedes Elementarereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit zu haben, wollen wir, dass die Gegner mit höherer Wahrscheinlichkeit auf den Spieler zulaufen. Angenommen der Spieler steht im Norden, dann verringert ein Schritt nach Norden die Distanz, ein Schritt nach Süden erhöht die Distanz und ein Schritt nach Osten oder Westen ändert die Distanz nicht (kaum). Nun soll ein Schritt, der die Distanz verringert, fünfmal so wahrscheinlich sein, wie ein Schritt, der die Distanz erhöht und zweimal so wahrscheinlich, wie ein Schritt, der die Distanz nicht verändert. Welche Wahrscheinlichkeiten müssen den Elementarereignissen zugewiesen werden, damit diese Bedingungen erfüllt sind und wir einen Wahrscheinlichkeitsraum erhalten?

Beispiel 5 **(je 2 Punkte für a + b, c und d + e)**
Wir werfen i-seitige Würfel für $i \in \{4, 6, 8, 10, 12, 20\}$ wie in **Beispiel 2**. Unter der Annahme, dass die Würfel fair sind, ist der Wurf eines Würfels mit dem geeigneten Ereignisraum ein Laplace-Zufallsexperiment.

(a) Geben Sie für $i \in \{4, 6, 8, 10, 12, 20\}$ entsprechende Wahrscheinlichkeitsräume an.

(b) Wie viel Elemente kann ein Ereignis beim Wurf eines vierseitigen Würfels haben? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse in Abhängigkeit von der Anzahl an Elementen im Ereignis.

(c) Für $i = 8$ und $i = 20$ sei

$$A_i = \{\text{die geworfene Zahl ist gerade}\} \text{ und}$$
$$B_i = \{\text{die geworfene Zahl ist kleiner als } i/4\}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}(A_i)$, $\mathbb{P}(B_i)$, $\mathbb{P}(A_i \cup B_i)$, $\mathbb{P}(A_i \cap B_i)$, $\mathbb{P}(B_i^c)$ und $\mathbb{P}(A_i \setminus B_i)$.

(d) Die einfachste Möglichkeit den Ereignisraum $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ mit den gegebenen Würfeln abzubilden, ist das zweimalige Würfeln eines zehnseitigen Würfels. Ist dieser Vorgang ein Laplace-Zufallsexperiment? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(e) Ist das in **Beispiel 2f** durchgeführte Zufallsexperiment (der Angriff mit der Streitaxt) ein Laplace-Experiment? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Beispiel 6 **(2 Punkte)**
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie nur mit den Eigenschaften aus der Definition des Wahrscheinlichkeitsraums für $A, B \subset \Omega$

- die Gegenwahrscheinlichkeit, i.e. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- die Monotonie, i.e. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- das einfache doppelte Abzählen, i.e. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Hinweis: Beweisen Sie für das „doppelte Abzählen“ zuerst $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Beispiel 7 **(2 Punkte)**
Paul hat einen unfairen sechsseitigen Würfel. Er behauptet, die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(\{1,2,3\}) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{11}{18}, \mathbb{P}(\{1,5\}) = \frac{5}{18}, \mathbb{P}(\{5,6\}) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

ermittelt zu haben und bietet ein Spiel an. Sie dürfen zuerst eine Zahl wählen, danach wählt Paul eine Zahl und der, dessen Zahl gewürfelt wird, gewinnt.

(a) Zeigen Sie, dass die von Paul angegebenen Wahrscheinlichkeiten nicht stimmen können.

(b) Paul gibt zu, dass er gelogen hat und macht folgende Änderung:

$$\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{5}{18}\,.$$

Können seine Angaben jetzt stimmen? Falls ja, auf welche Zahl sollten Sie setzen?