**Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2019/2020**

**Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz**

**5. Übungsblatt (5. November 2019)**

---

**Beispiel 17** **(je 2 Punkte für a und b + c)**

Bei einem Preisausschreiben gibt es fünf Gewinner, auf die drei Smartphones und zwei Tablets verteilt werden. Die Preisverteilung wird durch Werfen einer fairen Münze bestimmt, wobei bei Zahl ein Smartphone und bei Kopf einem Tablet verschenkt wird. Nacheinander wird die Münze für die Gewinner geworfen, bis keine Auswahlmöglichkeit mehr besteht, das heißt nur mehr entweder Smartphones oder Tables übrig sind, dann werden die restlichen Geräte einfach ausgeteilt.

(a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Gewinner ein Smartphone erhält, wenn der erste und der zweite Gewinner ebenfalls Smartphones bekommen haben.

(b) Wir definieren die Ereignisse

$$A = \{\text{der dritte Gewinner erhält ein Smartphone}\},$$
$$B = \{\text{der fünfte Gewinner erhält ein Tablet}\}.$$

Sind die Ereignisse $A$ und $B$ voneinander unabhängig?

(c) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A \mid B)$, $\mathbb{P}(B \mid A)$.

**Beispiel 18** **(3 Punkte)**

Die Augenfarbe einer Person wird durch ein einziges Genpaar bestimmt. Die Gene dieses Genpaars gibt es in den Varianten blau, grün und braun. Das Gen für braune Augen ist dabei dominanter als das für grüne Augen, welches wiederum dominanter als das Gen für blaue Augen ist. Das heißt, die Person hat blaue Augen, wenn sie zwei blaue Gene hat, grüne wenn sie zumindest ein grünes Gen aber kein braunes Gen hat und ansonsten braune Augen. Unabhängig voneinander erhält ein Kind je ein Gen von jedem Elternteil, das mit gleicher Wahrscheinlichkeit vererbt wird. Peter und seine beiden Eltern haben braune Augen, Peters Schwester hat blaue Augen.

(a) Wie wahrscheinlich ist es, dass Peter ein Gen für blaue Augen hat?

(b) Peters Frau hat grüne Augen und seine Schwiegermutter blaue Augen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr erstes Kind blaue oder grüne Augen haben wird?

(c) Angenommen ihr erstes Kind hat braune Augen, wie wahrscheinlich ist es, dass auch ihr zweites Kind braune Augen hat?

**Beispiel 19** **(2 Punkte)**

Wir werfen einen zwanzigseitigen Würfel und betrachten die Ereignisse

$$A = \{\text{die geworfene Zahl ist größer als 10}\},$$
$$B = \{\text{die geworfene Zahl ist gerade}\},$$
$$C = \{\text{die geworfene Zahl ist durch drei teilbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse paarweise unabhängig sind, aber alle drei Ereignisse gemeinsam nicht unabhängig sind.

**Beispiel 20** **(2 Punkte)**

Auf Facebook werden Bilder mit einer Software (Filter) auf verbotene Inhalte untersucht. Die Software erkennt zu 80%, dass ein nicht erlaubtes Bild verbotene Inhalte enthält und zu 15% werden bei einem zulässigen Bild fälschlicherweise verbotene Inhalte erkannt. Es wurde ermittelt, dass auf etwa 10% der hochgeladenen Bilder verbotene Inhalte zu sehen sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Software auf einem Bild verbotene Inhalte erkennt? Angenommen es werden verbotene Inhalte erkannt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bild wirklich nicht zulässig ist?

**Beispiel 21** **(2 Punkte)**

Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Ereignisse mit $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. Zeigen Sie,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$