**Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2019/2020**

**Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz**

**7. Übungsblatt (19. November 2019)**

---

**Beispiel 28** **(2 Punkte)**

Eine stetige Zufallsvariable $X$ sei für ein $c \in \mathbb{R}$ gegeben durch ihre Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, c], \\ 1/2 & \text{für } x \in (c, 2], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die beiden möglichen Werte von $c$ und berechnen Sie in Abhängigkeit von $c$

- die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und stellen Sie $f_X$ und $F_X$ graphisch dar.
- den Erwartungswert von $X$.
- $\mathbb{P}[\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}]$.

**Beispiel 29** **(2 Punkte)**

Eine stetige Zufallsvariable $X$ sei für ein $c \in [0, 1]$ gegeben durch ihre Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1, \\ c(1 + x) & \text{für } -1 < x \leq 0, \\ c + (1 - c)\frac{x}{x+1} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Dichtefunktion $f_X$ abhängig von $c$ und zeichnen Sie $f_X$ und $F_X$ für $c = 1/2$.

(b) Zeigen Sie, dass $F_X$ für jedes $c \in [0, 1]$ stetig und monoton wachsend ist und dass $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}[-1 < X \leq 1]$ für $c = 1/2$.

**Beispiel 30** **(2 Punkte)**

Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$f_X(x) = \frac{c}{x^2 + 1} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

die Dichtefunktion einer Zufallsvariable $X$ ist. Zeigen Sie, dass $X$ keinen Erwartungswert besitzt.

**Beispiel 31** **(2 Punkte)**

(a) Es sei eine Zufallsvariable $X$ mit Verteilungsfunktion $F_X(x)$ gegeben. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y = \alpha X + \beta$ mit $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$.

(b) Es sei $X$ die Zufallsvariable aus Beispiel 29 und $Y = 2X + 2$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y$.

**Beispiel 32** **(2 Punkte)**

Es sei eine Zufallsvariable $X$ mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = 2$ und $\mathbb{E}((2X - 3)^2) = 5$ gegeben. Berechnen Sie die Varianz von $X$, $\mathbb{E}((3 - X)^2)$ und $\mathrm{Var}(2X + 3)$.