Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2019/2020

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

9. Übungsblatt (3. Dezember 2019)

Beispiel 38 **(2 Punkte)**
Ein Paketdienst liefert in der Regel jedes zehnte Paket verspätet aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Zustellung von dreißig Paketen maximal drei Pakete verspätet zugestellt werden mittels

- exakter Berechnung.
- Approximation durch die Poisson-Verteilung.

Beispiel 39 **(2 Punkte)**
Ein Freund will mit Ihnen wetten, dass der FC Red Bull Salzburg im nächsten Spiel zwischen drei und fünf Tore schießen wird. Bisher hat Salzburg in dieser Saison im Durchschnitt drei Tore pro Spiel erzielt. Sie wollen die Wette nur dann eingehen, wenn Ihre Gewinnchance höher ist, als die Ihres Freundes.

(a) Sollten Sie auf die Wette eingehen, wenn Sie annehmen, dass die Anzahl der Tore Poisson-verteilt ist?

(b) Wenn Sie davon ausgehen, dass Salzburg zehn Mal auf das gegnerische Tor schießt, wobei die Wahrscheinlichkeit eines Treffers nur von der durchschnittlichen Trefferquote und den maximal möglichen Toren abhängt, verändert das Ihr Wettverhalten?

Beispiel 40 **(2 Punkte)**
Die Lebensdauer einer billigen Batterie ist eine exponentialverteilte Zufallvariable Z mit einer durchschnittlichen Lebensdauer von zweitausend Stunden.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer einer zufällig ausgewählten Batterie zwischen tausend und zweitausend Stunden liegt?

(b) Ein Gerät benötigt vier Batterien um zu funktionieren. Unter der Annahme, dass die Lebensdauern der Batterien voneinander unabhängig sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät nach zweitausend Stunden noch funktioniert, wenn

- vier neue Batterien eingelegt werden?
- vier funktionierende Batterien eingelegt werden, die schon zweitausend Stunden in Betrieb waren?

(c) Angenommen das Gerät funktioniert auch mit zwei Batterien, obwohl vier eingelegt werden können. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät nach zweitausend Stunden noch funktionieren, wenn vier neue Batterien eingelegt werden?

Beispiel 41 **(2 Punkte)**
Sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$.

(a) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X < x]$.

(b) Zeigen Sie für c, $d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c < d \leq b$ folgende Identität:

$$\mathbb{P}[X \in (c, d)] = \frac{d-c}{b-a}\,.$$

(c) Sei $\mathbb{E}(X) = 1$ und $\mathrm{Var}(X) = 3$. Bestimmen Sie a und b.

Beispiel 42 **(2 Punkte)**
Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Dichtefunktionen der Zufallsvariablen $Z = e^X$ und $Y = log(X)$.

Beispiel 43 **(3 Punkte)**

Sei X die Anzahl von kurzzeitigen Netzwerkausfällen in einem Zeitraum von einem Tag. Wir nehmen an, dass X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$ ist. Nicht jeder Netzwerkausfall wird von den Benutzern des Netzwerks bemerkt, da ein Nutzer einen Ausfall nur bemerkt, wenn er während des Ausfalls versucht eine Webseite zu laden. Wir nehmen an, dass jeder Netzwerkausfall unabhängig von den anderen Netzwerkausfällen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in (0, 1)$ bemerkt wird. Sei Y die Anzahl der Netzwerkausfälle an einem Tag, die von Nutzern bemerkt werden. Zeigen Sie, dass Y mit Parameter $p\lambda$ Poisson-verteilt ist.

Hinweis: Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathbb{P}[Y = k] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[Y = k \mid X = n] \, \mathbb{P}[X = n].$$