

Beispiel 44

(2 Punkte)

Sei X standardnormalverteilt. Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $x > 0$:

- (a) $\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X < -x]$.
- (b) $\mathbb{P}[|X| > x] = 2\mathbb{P}[X > x]$.
- (c) $\mathbb{P}[|X| < x] = 2\mathbb{P}[X < x] - 1$.

Beispiel 45

(2 Punkte)

Eine Fabrik produziert elektrische Widerstände. Der Widerstandswert R eines elektrischen Widerstands ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 40\Omega$ und $\sigma = 2\Omega$.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Widerstandswert eines zufällig ausgewählten elektrischen Widerstands höchstens 5% vom Erwartungswert abweicht?
- (b) Bestimmen Sie $\alpha > 0$, sodass für einen zufällig ausgewählten elektrischen Widerstand $\mathbb{P}[|R - 40| \leq \alpha] = 0.98$.
- (c) Wie muss σ abgeändert werden, damit ein zufälliger ausgewählter elektrischer Widerstand mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% einen Widerstandswert größer als 38Ω hat?

Beispiel 46

(2 Punkte)

Ein chemischer Prozess wurde $n = 10$ Mal durchgeführt und dabei wurden jeweils die folgenden Dauern x_i , $i = 1, \dots, n$, in Stunden notiert:

3.3, 2.1, 1.4, 4.5, 5.7, 2.3, 2.6, 3.4, 1.8, 2.9.

Wir nehmen an, dass die Dauer des chemischen Prozesses eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ ist, wobei μ und σ mit den folgenden Gleichungen geschätzt werden können:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Bestimmen Sie anhand der Schätzwerte eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass der Prozess mit einer Wahrscheinlichkeit von

- 95% weniger als c Stunden dauert.
- 92% zwischen $3 - c$ und $3 + c$ Stunden dauert.

Beispiel 47

(3 Punkte)

Im Jahr 2016 haben 52% der Briten für einen Austritt aus der europäischen Union gestimmt.

- (a) Nutzen Sie den Approximationssatz von De Moivre, um für $n = 11$, $n = 101$ und $n = 1001$ die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, dass bei einer Stichprobe von n Briten mehr als 50% in dieser Stichprobe für den Austritt gestimmt haben.
- (b) Benutzen Sie ein Computeralgebrasystem (z.B. Mathematica mittels Wolfram Alpha) um die Wahrscheinlichkeiten aus (a) genau auszurechnen und vergleichen Sie die Ergebnisse.
- (c) Wie groß müssen Sie die Stichprobe wählen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50% in der Stichprobe für den Austritt gestimmt haben, größer als 0.95 ist?

Hinweis: Es reicht die Formel aufzustellen, alle Werte zu bestimmen und die Gleichung mittels eines Computeralgebrasystems zu lösen.

Beispiel 48**(2 Punkte)**

Die Größe von 14-jährigen Mädchen ist in etwa normalverteilt. Weiters ist bekannt, dass Mädchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 91% kleiner als 161cm sind und mit einer Wahrscheinlichkeit von 98.5% größer als 135cm. Ermitteln Sie die Durchschnittsgröße und die Standardabweichung.