Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2019/2020

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

11. Übungsblatt (7. Jänner 2020)

Beispiel 49 **(3 Punkte)**

Sei X eine Gamme-verteilte Zufallsvariable mit Gestaltsparameter $a = n \in \mathbb{N}$ und Skalierungsparameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie für $x > 0$

$$F_X(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

Beispiel 50 **(2 Punkte)**

Sie stehen in der Warteschlange einer Supermarktkasse und vor Ihnen sind noch zwei Personen. Die erste Person wird gerade bedient und die zweite wartet noch. Seien die Zeiten, die die zwei Personen benötigen, unabhängig exponentialverteilt, wobei sie im Durchschnitt zwei Minuten betreut werden. Ihre Wartezeit kann mit einer Gamma-Verteilung mit $a = 2$ und λ gleich dem Parameter λ der Exponentialverteilungen modelliert werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie weniger als sechs Minuten warten?

Angenommen die Anzahl der abgefertigten Kunden an der Supermarktkasse ist Poissonverteilt, wobei in sechs Minuten im Schnitt drei Personen abgefertigt werden können. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in sechs Minuten zumindest zwei Kunden abgefertigt werden?

Beispiel 51 **(2 Punkte)**

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor, wobei X die Werte 1, 2, 3 und Y die Werte 0, 1 annehmen kann. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$\mathbb{P}[X = 1, Y = 0] = 0\,, \qquad \mathbb{P}[X = 2, Y = 0] = \tfrac{1}{8}\,, \qquad \mathbb{P}[X = 3, Y = 0] = \tfrac{3}{16}\,,$$
$$\mathbb{P}[X = 1] = \tfrac{1}{4}\,, \qquad \mathbb{P}[X = 2, Y = 1] = \tfrac{3}{8}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitstabelle (d.h. inklusive Randverteilungen) des Zufallsvektors (X, Y).

(b) Berechnen Sie Erwartung und Varianz von X und von Y.

(c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Verteilungsfunktion und die Erwartung der Zufallsvariable $Z = X + Y$.

Beispiel 52 **(je 2 Punkte für a + b + c und d + e)**

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit der folgenden Dichtefunktion:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy^3 & \text{wenn } y^2 \leq x \leq 1, y \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie den Bereich in $\mathbb{R}^2$, in dem $f_{X,Y}(x, y) > 0$.

(b) Bestimmen Sie k, sodass $f_{X,Y}(x, y)$ wirklich eine Dichtefunktion ist.

(c) Berechnen Sie die Randdichten und Randverteilungen von X und Y.

(d) Berechnen Sie Erwartung und Varianz von X und von Y.

(e) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X > Y]$ und $\mathbb{P}[X < Y]$.

Beispiel 53 **(2 Punkte)**

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$. Zeigen Sie für a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$:

(a) Es gilt

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in (a, b] \times (c, d]] = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(b, c) - F_{X,Y}(a, d) + F_{X,Y}(a, c).$$

(b) Falls X und Y stochastisch unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in (a, b] \times (c, d]] = (F_X(b) - F_X(a))(F_Y(d) - F_Y(c)).$$