# Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2019/2020

## Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

## 12. Übungsblatt (14. Jänner 2020)

---

**Beispiel 53** **(2 Punkte)**

**Anmerkung: Dieses Beispiel wurde verschoben, da es in der letzten Übungseinheit in keiner Gruppe besprochen werden konnte. Die Kreuze für das Beispiel sind verfallen und es kann erneut angekreuzt werden.**

Sei $(X, Y)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$. Zeigen Sie für $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$:

(a) Es gilt

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in (a, b] \times (c, d]] = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(b, c) - F_{X,Y}(a, d) + F_{X,Y}(a, c).$$

(b) Falls $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in (a, b] \times (c, d]] = (F_X(b) - F_X(a))(F_Y(d) - F_Y(c)).$$

**Beispiel 54** **(je 2 Punkte für a + b + c und d + e + f)**

Sei $(X, Y)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit der folgenden Dichtefunktion:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx & \text{wenn } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie den Bereich in $\mathbb{R}^2$, in dem $f_{X,Y}(x, y) > 0$.

(b) Bestimmen Sie die Konstante $k$, sodass $f_{X,Y}(x, y)$ wirklich eine Dichtefunktion ist.

(c) Berechnen Sie die Randdichten und Randverteilungen von $X$ und $Y$.

(d) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von $X$ und von $Y$. Sind $X$ und $Y$ unabhängig?

(e) Berechnen Sie $\mathbb{P}\left[X < 2Y, X < \frac{3}{4}\right]$.

(f) Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{P}[X^n < Y] = \frac{1}{2}$.

**Beispiel 55** **(2 Punkte)**

Sei $(X, Y)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $\operatorname{Var}(aX + bY) = a^2 \operatorname{Var}(X) + b^2 \operatorname{Var}(Y) + 2ab \operatorname{Cov}(X, Y)$.

(b) $\operatorname{Cov}(aX + b, Y) = a \operatorname{Cov}(X, Y)$.

(c) Wenn $a \neq 0$, dann gilt $\rho(aX + b, Y) = \frac{a}{|a|}\rho(X, Y)$.

**Beispiel 56** **(3 Punkte)**

Sei $X$ eine stetige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X^n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die symmetrisch um 0 ist, d.h. die Dichte $f_X$ erfüllt $f_X(x) = f_X(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X^k) = 0$ wenn $k$ ungerade ist. Folgern Sie daraus, dass die Kovarianz von $X$ und $X^2$ gleich 0 ist, obwohl $X$ und $X^2$ offensichtlich nicht unabhängig sind.

**Beispiel 57** **(3 Punkte)**

Sei $X \sim Exp(\lambda)$ und $Y \sim \gamma(a, \lambda)$ mit $a, \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $Z = X + Y \sim \gamma(a + 1, \lambda)$. Folgern Sie daraus, dass die Summe von $n \in \mathbb{N}$ voneinander unabhängigen Zufallsvariablen mit Verteilung $Exp(\lambda)$ eine Zufallsvariable mit Verteilung $\gamma(n, \lambda)$ ist.