Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2019/2020

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

13. Übungsblatt (21. Jänner 2020)

Beispiel 57 **(3 Punkte)**
Anmerkung: Dieses Beispiel wurde verschoben, da es in der letzten Übungseinheit in keiner Gruppe besprochen werden konnte. Die Kreuze für das Beispiel sind verfallen und es kann erneut angekreuzt werden.

Sei $X \sim Exp(\lambda)$ und $Y \sim \gamma(a, \lambda)$ mit $a, \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $Z = X + Y \sim \gamma(a + 1, \lambda)$. Folgern Sie daraus, dass die Summe von $n \in \mathbb{N}$ voneinander unabhängigen Zufallsvariablen mit Verteilung $Exp(\lambda)$ eine Zufallsvariable mit Verteilung $\gamma(n, \lambda)$ ist.

Beispiel 58 **(2 Punkte)**
Sie fahren mit einem Tesla Model S, dessen Batterie kurz zuvor vollständig aufgeladen wurde. Die verbleibende Reichweite nach einer vollständigen Ladung sei eine Zufallsvariable mit einer Erwartung von 500 km und einer Standardabweichung von 60 km.

(a) Schätzen Sie mit Hilfe der Markov-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit, dass Sie ihr Ziel in 600 km Entfernung nicht erreichen.

(b) Verwenden Sie die Tschebyschev Ungleichung, um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass Sie zwischen 420 und 580 km fahren können, bis Sie die Batterie Ihres Autos aufladen müssen.

Beispiel 59 **(2 Punkte)**
Ein Studienassistent muss noch hundert Beispiele einer Prüfung korrigieren. Im Mittel hat er bisher vier Minuten pro Beispiel benötigt und die Standardabweichung beträgt geschätzt zwei Minuten. Verwenden sie den zentralen Grenzwertsatz um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass der Studienassistent

(a) mit der Korrektur innerhalb von sechs Stunden fertig wird.

(b) zwischen sechseinhalb und acht Stunden zum Korrigieren der restlichen Beispiele benötigt.

Beispiel 60 **(2 Punkte)**
Eine Maschine benötigt für ihre Funktion ein Bauteil, das sofort ersetzt werden muss, wenn die Abnützung zu groß ist. Die Dauer, die ein Bauteil verwendet werden kann, ist eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 0.1$ Tage^{-1}. Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Anzahl der Ersatzbauteile, die vorrätig sein müssen, damit die Maschine zu 97% 1000 Tage betrieben werden kann, wenn gerade ein neues Bauteil eingesetzt wurde.

Beispiel 61 **(2 Punkte)**
Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate $\lambda = 2$. Berechnen Sie:

(a) $\mathbb{P}[N_1 \geq 2]$,

(b) $\mathbb{P}[N_1 \leq 1, N_5 = 7]$,

(c) $\mathbb{P}[N_1 \leq 1 \mid N_5 = 7]$,

(d) $\mathbb{P}[N_5 = 7 \mid N_1 \leq 1]$.

Beispiel 62 **(2 Punkte)**
Herr Lang erhält durchschnittlich zwölf E-Mails pro Tag. Wir modellieren die Anzahl der E-Mails als homogenen Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$, wobei $t = 0$ dem Beginn des heutigen Tages und $t = 1$ dem Ende des heutigen Tages entspricht, d.h. t beschreibt die Anzahl an Tagen, die wir betrachten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Lang

(a) heute sieben E-Mails erhält.

(b) heute und morgen insgesamt zwölf E-Mails erhält, wenn er heute drei E-Mails erhält.

(c) morgen zehn E-Mails erhält, wenn er heute fünf E-Mails erhält.

(d) heute und morgen insgesamt mehr als zwanzig E-Mails erhält.

Hinweis: Es ist ausreichend, die gefragten Wahrscheinlichkeiten als numerische Ausdrücke anzugeben, d.h. z.B. e^{-1} statt 0.368.