

Beispiel 63

(2 Punkte)

Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate $\lambda > 0$ und seien $s, t > 0$ mit $s < t$.

- (a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(N_s)$ und $\mathbb{E}(N_s^2)$.
- (b) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von N_s und N_t .

Beispiel 64

(2 Punkte)

Frau Schmerzliebhaber besucht ihre Ärztin im Durchschnitt zehn Mal pro Monat. Die Anzahl der Besuche sei durch einen homogenen Poisson-Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$ modelliert, wobei $t = 1$ einem Monat entspricht und $t = 0$ dem Beginn des Jahres. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- (a) in den ersten zwei Monaten genau zwanzig Besuche stattfinden? Vereinfachen Sie die Berechnung mit Hilfe der Stirlingformel: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.
- (b) in den ersten zwei Monaten mehr als elf Besuche stattfinden, wenn im ersten Monat sechs Besuche stattfinden?
- (c) im ersten Monat elf Besuche stattfinden, wenn in den ersten drei Monaten dreißig Besuche stattfinden?
- (d) zwischen dem dritten und vierten Besuch weniger als ein Tag vergeht, wenn wir annehmen, dass ein Monat dreißig Tage hat?

Beispiel 65

(je 2 Punkte für a + b + c und d + e)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Folgende Übergangswahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$\begin{aligned} p(0, 1) &= 0, & p(0, 2) &= 0, & p(0, 3) &= 0, & p(0, 4) &= 0, \\ p(1, 0) &= \frac{1}{2}, & p(1, 1) &= \frac{1}{4}, & p(1, 3) &= 0, & p(1, 4) &= 0, \\ p(2, 3) &= 1, \\ p(3, 0) &= 0, & p(3, 1) &= 0, & p(3, 2) &= \frac{1}{2}, & p(3, 4) &= 0, \\ p(4, 2) &= \frac{1}{4}, & p(4, 3) &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix und zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
- (b) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_9 = 0 \mid X_6 = 1]$.
- (c) Eine Anfangsverteilung sei gegeben durch $\mathbb{P}[X_0 = 3] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[X_0 = 4] = \frac{2}{3}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_2 = 2]$ und $\mathbb{P}[X_2 = 3]$.
- (d) Bestimmen Sie absorbierende Zustände, den Rand der Markovkette und ihre inneren Zustände. Ist die Markovkette absorbierend?
- (e) Ermitteln Sie für alle Zustände $i \in \{0, \dots, 4\}$ die Absorptionswahrscheinlichkeiten $P_i(T)$ für $T = \{0\}$ und die erwartete Schrittzahl bis zur Absorption.

Beispiel 66

(2 Punkte)

Die Windstärke am Gipfel des Großglockners unterliegt täglichen Schwankungen. An einem Tag ist es entweder windstill, leicht windig, stark windig oder stürmisch. Aufgrund langjähriger Statistiken kennt man folgende Wahrscheinlichkeiten:

- Auf einen windstillen oder leicht windigen Tag folgt mit 50% Wahrscheinlichkeit ein windstiller Tag, mit 30% ein leicht windiger Tag und mit 20% ein stark windiger Tag.
- Auf einen stark windigen Tag folgt mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit ein windstiller, leicht windiger, stark windiger bzw. stürmischer Tag.
- Auf einen stürmischen Tag folgt mit 50% Wahrscheinlichkeit ein weiterer stürmischer Tag und mit je 25% ein leicht windiger bzw. stark windiger Tag.

Modellieren Sie die Windstärke durch eine Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wobei X_n die Windstärke am n -ten Tag bezeichnet.

- (a) Bestimmen Sie den Zustandsraum der Markovkette, geben Sie die Übergangsmatrix an und zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es spätestens drei Tage nach einem windstillen Tag einen stürmischen Tag gibt?
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen windstillen Tag drei weitere windstille Tage folgen?