

**Beispiel 19**

Sei  $(X, Y)$  ein diskreter zweidimensionaler Zufallsvektor, wobei  $X$  die Werte 1, 2, 3 und  $Y$  die Werte 0, 1 annehmen kann. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = 1, Y = 0] &= 0, & \mathbb{P}[X = 2, Y = 0] &= \frac{1}{8}, & \mathbb{P}[X = 3, Y = 0] &= \frac{3}{16}, \\ \mathbb{P}[X = 1] &= \frac{1}{4}, & \mathbb{P}[X = 2, Y = 1] &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitstabelle des Zufallsvektors  $(X, Y)$ .
- (b) Berechnen Sie Erwartung und Varianz von  $X$  und von  $Y$ .
- (c) Ermitteln Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von  $X$  und  $Y$ .
- (d) Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?

**Beispiel 20**

Sei  $(X, Y)$  ein stetiger zweidimensionaler Zufallsvektor mit der folgenden Dichtefunktion:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy^3 & \text{wenn } y^2 \leq x \leq 1, y \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie  $k$ , sodass  $f_{X,Y}(x, y)$  wirklich eine Dichtefunktion ist.
- (b) Berechnen Sie die Randdichten und Randverteilungen von  $X$  und  $Y$ .
- (c) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?
- (d) Berechnen Sie  $\mathbb{P}[X > Y]$  und  $\mathbb{P}[X < Y]$ .