Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2022/2023

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

2. Übungsblatt – 18. Oktober 2022

Beispiel 5 **(2 Punkte)**

Wir betrachten erneut die Urne aus **Beispiel 1** mit drei blauen, zwei roten und einer gelben Kugel, aus der zwei zufällige Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden. Ein geeigneter Ereignisraum für

- **Beispiel 1 (a)** ist $\Omega_a = \{B, R, G\}^2$, wobei z.B. (B, G) dafür steht, dass die erste Kugel blau und die zweite gelb ist.
- **Beispiel 1 (b)** ist $\Omega_b = \{(b, r) \mid b,\, r \in \{0, 1, 2\}, b + r \leq 2\}$, wobei z.B. $(1, 0)$ angibt, dass eine blaue, null rote und eine $(= 2 - 1 - 0)$ gelbe Kugel gezogen wurden.

(a) Berechen Sie die Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis aus Ω_a und Ω_b, wobei das einmalige Ziehen einer der sechs Kugeln aus der Urne ein Laplace-Experiment ist.

(b) Wieviele Ereignisse gibt es in den Wahrscheinlichkeitsräumen zu Ω_a und zu Ω_b?

(c) Lässt sich mit Ω_a oder Ω_b ein Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum bilden?

Beispiel 6 **(2 Punkte)**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie nur mit den Eigenschaften aus der Definition des Wahrscheinlichkeitsraums für Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$

- die Gegenwahrscheinlichkeit, i.e. $\mathbb{P}(A^{\mathsf{c}}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- die Monotonie, i.e. $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- das einfache doppelte Abzählen, i.e. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Hinweis: Beweisen Sie für das „doppelte Abzählen“ zuerst $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Beispiel 7 **(2 Punkte)**

Christoph hat einen gezinkten sechsseitigen Würfel. Er behauptet, die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}\,,\ \mathbb{P}(\{1, 2, 3\}) = \frac{11}{18}\,,\ \mathbb{P}(\{1, 5\}) = \frac{1}{2}\,,\ \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{3}\,,\ \mathbb{P}(\{5, 6\}) = \frac{5}{18}$$

ermittelt zu haben und bietet ein Spiel an. Sie dürfen zuerst eine Zahl wählen, danach wählt Christoph eine Zahl und der, dessen Zahl gewürfelt wird, gewinnt.

(a) Zeigen Sie, dass die von Christoph angegebenen Wahrscheinlichkeiten nicht stimmen können.

(b) Christoph gibt zu, dass er gelogen hat und macht folgende Änderung:

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{5}{18}\,.$$

Können seine Angaben jetzt stimmen? Falls ja, auf welche Zahl sollten Sie setzen?

Beispiel 8 **(2 Punkte)**

Isabel spielt Viererschnapsen. Dabei werden zwanzig Karten (Bube, Dame, König, Zehner und Ass in vier verschiedenen Farben) verwendet und jeder Spieler bekommt fünf Karten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ohne die Reihenfolge zu berücksichtigen, in der die Karten verteilt werden, sodass Isabel

(a) vier Buben und eine Dame erhält?

(b) vier Karten einer Farbe mit Ass und dazu noch ein anderes Ass bekommt?

(c) mindestens ein Ass und einen Zehner der selben Farbe auf der Hand hat?

Hinweis: Achten Sie bei (c) auf den Fall, dass Isabel Ass und Zehner zweier verschiedener Farben auf der Hand haben kann.

Beispiel 9 **(2 Punkte)**

(a) Belegen Sie mit einem kombinatorischen Argument, dass die folgende Gleichung für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$ erfüllt ist:

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} \binom{m}{r-i}.$$

(b) Wir betrachten nochmal die Schulklasse aus **Beispiel 3** mit 17 Mädchen und 8 Jungen. Wenn genau zwei Kinder infiziert sind und wir zwischen einzelnen Kindern unterscheiden, wieviele Möglichkeiten gibt es dann für den Fall, dass

(i) ein Junge und ein Mädchen

(ii) zwei Mädchen

(iii) zwei Jungen

infiziert sind?