

6. Übungsblatt – 22. November 2022

---

**Beispiel 25** **(2 Punkte)**

Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte  $-1$ ,  $0$  und  $1$  annehmen kann. Gegeben sei  $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = -1] = p$  für ein  $p \in (0, \frac{1}{2})$ .

- (a) Berechnen Sie  $\mathbb{P}[X = 0]$ .
- (b) Bestimmen Sie die möglichen Werte der Konstanten  $c > 0$ , sodass  $\mathbb{E}(c^X) = 1 + \frac{p}{2}$ .

**Beispiel 26** **(2 Punkte)**

Eine stetige Zufallsvariable  $X$  sei für  $a, b \in \mathbb{R}$  gegeben durch ihre Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ bx & \text{für } x \in (0, 1], \\ a - \frac{b}{x} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie  $a$  und  $b$ , sodass  $F_X(x)$  tatsächlich die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable ist.
- (b) Finden Sie eine dazugehörige Dichtefunktion  $f_X(x)$  und stellen Sie  $f_X(x)$  und  $F_X(x)$  graphisch dar.
- (c) Zeigen Sie, dass  $X$  keine Erwartung besitzt.
- (d) Berechnen Sie  $\mathbb{P}[0 < X \leq 2]$ .

**Beispiel 27** **(2 Punkte)**

- (a) Es sei eine Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  gegeben. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $Y = \alpha X + \beta$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\alpha \neq 0$ .
- (b) Es sei  $X$  die Zufallsvariable aus **Beispiel 26** und  $Y = 2X + 2$ . Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von  $Y$ .
- (c) Besitzt  $Y$  eine Erwartung?

**Beispiel 28** **(2 Punkte)**

Es sei eine Zufallsvariable  $X$  mit Erwartungswert  $\mathbb{E}(X) = 3$  gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{E}\left((2X - 3)^2\right) \geq 9$ .
- (b) Es sei  $\mathbb{E}\left((2X - 3)^2\right) = 13$ .  
Berechnen Sie die Varianz von  $X$ ,  $\mathbb{E}\left((2 - X)^2\right)$  und  $\text{Var}(2X + 3)$ .

**Beispiel 29** **(2 Punkte)**

Für  $\lambda > 0$  sei eine stetige Zufallsvariable  $X$  gegeben durch

$$\mathbb{P}[X \geq x] = \frac{(x + \lambda + 1)e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\lambda + 1} \quad \text{für } x \geq 0.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Dichte von  $X$ .
- (b) Berechnen Sie die Erwartung und die Varianz von  $X$ .