Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2022/2023

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

7. Übungsblatt – 29. November 2022

Beispiel 30

Sei X eine geometrischverteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0,1)$, das heißt $X \sim Geom(p)$. Zeigen Sie:

(a) Für die Verteilungsfunktion von X gilt:

$$F_X(k) = 1 - (1-p)^k.$$

(b) Für natürliche Zahlen k und n mit $k < n$ gilt:

$$\mathbb{P}[X \leq n \mid X > k] = \mathbb{P}[X \leq n - k].$$

Beispiel 31 **(2 Punkte)**

Bei einem Gacha-Game können Spieler Monster beschwören. Für eine Beschwörung wird ein Ticket benötigt, das umgerechnet achtzig Cent kostet. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% wird dabei eine besonderes Monster beschworen. Sei X der Betrag, der für Beschwörungen ausgegeben werden muss, bis das erste besondere Monster beschworen wird.

(a) Wie hoch ist der zu erwartende Betrag und wie groß ist die Varianz von X?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- mehr als einhundert Euro ausgegeben werden müssen, um ein besonderes Monster zu erhalten.
- mehr als zweihundert Euro ausgegeben werden müssen, um ein besonderes Monster zu erhalten, wenn bereits einhundert Euro ausgegeben wurden.

Beispiel 32 **(2 Punkte)**

Bei einem Händler, der seine Waren per Brief versendet, kamen in einem Jahr von 1000 Briefsendungen 15 nicht an. In einem ausgewählten Monat verschickte der Händler 90 Briefe. Sei X die Anzahl der Kunden, die sich in diesem Monat beschwerten, keinen Brief bekommen zu haben.

(a) Wie viele Beschwerden sind in diesem Monat zu erwarten und wie groß ist die Varianz von X?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest drei Briefe in diesem Monat nicht angekommen sind, durch

(i) exakte Rechnung.

(ii) Approximation mit Hilfe der Binomialverteilung.

Beispiel 33 **(2 Punkte)**

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern n und p, das heißt $X \sim B(n,p)$. Zeigen Sie die folgende Gleichheit:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

Beispiel 34 **(2 Punkte)**

Im Paradiesdorf verkehrt ein Zug pro Minute und im Durchschnitt hat nur jeder zweihundertste Zug Verspätung. Wenn wir davon ausgehen, dass die Züge sich nicht gegenseitig beeinflussen, ist die Anzahl an verspäteten Zügen in einem halben Tag (12 Stunden) eine Binomialverteilung X.

(a) Bestimmen Sie die Erwartung und die Varianz von X.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens fünf Züge in einem halben Tag verspätet sind.

(c) Approximieren Sie X mit einer Poisson-Verteilung Y und bestimmen Sie die Erwartung und die Varianz von Y.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aus (b) näherungsweise mit der Verteilung Y.