Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2022/2023

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

8. Übungsblatt – 6. Dezember 2022

Beispiel 35 **(2 Punkte)**
Die Zufallsvariable X sei stetig gleichverteilt auf dem offenen Intervall $(0, 1)$.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}[X > x]$ für $x \in (0, 1)$.
(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $Y = -\ln(X)$.
(c) Welche Verteilung hat Y?
(d) Ermitteln Sie die Erwartung und die Varianz von Y.

Beispiel 36 **(2 Punkte)**
Bei einer Lieferung von Obstkisten sind immer wieder Kisten mit verdorbenem Obst dabei. Wir nehmen an, dass die Dauer, bis eine Kiste verdorbenes Obst enthält, in den ersten fünf Wochen exponentialverteilt ist. Im Schnitt sind bei einer Kiste drei Wochen nach dem Befüllen die ersten Früchte verdorben und wir gehen davon aus, dass Kisten unabhängig voneinander verdorbenes Obst enthalten. Eine Lieferung mit vierzig Kisten erreicht drei Tage nach dem Befüllen den Supermarkt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass maximal eine Kiste verdorbenes Obst enthält?
(b) Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn vom Befüllen bis zur Auslieferung zum Supermarkt eine Woche vergeht?
(c) Der Produzent verdient pro Kiste zehn Euro, muss aber für jede Kiste mit verdorbenem Obst eine Strafe von fünf Euro zahlen. Wie groß ist die erwartete Einnahme des Herstellers bei einer Lieferung von sechzig Kisten, die drei Tage nach dem Befüllen den Supermarkt erreichen? Wie verändert sich der Gewinn bei einer Lieferzeit von einer Woche?

Beispiel 37 **(2 Punkte)**
Sei X standardnormalverteilt. Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $x > 0$:

(a) $\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X < -x]$.
(b) $\mathbb{P}[|X| > x] = 2\,\mathbb{P}[X > x]$.
(c) $\mathbb{P}[|X| < x] = 2\,\mathbb{P}[X < x] - 1$.

Beispiel 38 **(je 2 Punkte für a + b + c und d + e)**
In einer Molkerei werden Glasflaschen mit Milch befüllt. Die Füllmenge M einer zufällig ausgewählten Flasche sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 1$ Liter und $\sigma = 20$ Milliliter, wobei die Sollmenge dem Durchschnittswert entspricht.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche mindestens dreißig Milliliter weniger als die Sollmenge enthält?
(b) Bestimmen Sie $c > 0$, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von genau 90% die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Flasche maximal c Milliliter von der Sollmenge abweicht.
(c) Eine Kiste enthält sechzehn Milchflaschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Kiste maximal zwei Flaschen befinden, die mindestens dreißig Milliliter weniger als die Sollmenge enthalten?
(d) Wie muss die Abfüllanlage eingestellt werden (d.h. wie muss die mittlere Füllmenge geändert werden), damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% eine zufällig ausgewählte Milchflasche höchstens dreißig Milliliter weniger als die Sollmenge enthält?
(e) Wie muss sich die Genauigkeit der Füllablage verbessern (d.h. wie groß darf die Standardabweichung höchstens sein), damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% eine zufällig ausgewählte Milchflasche höchstens dreißig Milliliter weniger als die Sollmenge enthält?