Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2022/2023

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

9. Übungsblatt – 13. Dezember 2022

Beispiel 39 **(2 Punkte)**

Wir modellieren die Ankunftszeit eines Flugzeugs auf einer festgelegten Strecke durch eine Exponentialverteilung. Im Schnitt sind Flüge auf dieser Strecke um zehn Minuten verspätet, wobei wir annehmen, dass ein Flug maximal zehn Minuten vor der geplanten Ankunftszeit ankommen kann.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

  (i) ein Flug mehr als zwanzig Minuten Verspätung hat?

  (ii) ein Flug mehr als vierzig Minuten Verspätung hat, wenn das Flugzeug bereits zehn Minuten zu spät ist?

(b) Ab einer Verspätung von mehr als zwanzig Minuten muss die Airline tausend Euro als Kompensation zahlen. Wie hoch ist die erwartete Kompensationszahlung für zweihundert Flüge, deren Ankunftszeiten unabhängig voneinander sind?

(c) Wie muss der Parameter λ verändert werden, so dass ein Flug mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% nicht mehr als zehn Minuten verspätet ist?

Beispiel 40 **(2 Punkte)**

Ein chemischer Prozess wurde $n = 11$ Mal durchgeführt und dabei wurden jeweils die folgenden Dauern x_i, $i = 1, \ldots, n$, in Minuten notiert:

43, 31, 24, 55, 40, 67, 33, 36, 44, 28, 39.

Wir nehmen an, dass die Dauer des chemischen Prozesses eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ ist, wobei μ und σ mit den folgenden Gleichungen geschätzt werden können:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \,, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

Bestimmen Sie anhand der Schätzwerte eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass der Prozess mit einer Wahrscheinlichkeit von

(a) 96% weniger als c Minuten dauert.

(b) 93% zwischen $40 - c$ und $40 + c$ Minuten dauert.

Beispiel 41 **(2 Punkte)**

Bei einer Corona-Impfstudie von BioNTech und Pfizer wurden (etwa) 43 500 Personen geimpft, wobei (um die) 39 000 davon den Impfstoff erhalten haben. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Gruppe von hundert Testpersonen maximal zehn nicht den Impfstoff erhalten haben. Berechnen Sie p

(a) genau.

(b) näherungsweise durch Approximation mit der Binomialverteilung.

(c) näherungsweise durch Approximation der Binomialverteilung aus (b) mit der Poisson-Verteilung.

(d) näherungsweise durch Approximation der Binomialverteilung aus (b) mit einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Verwenden Sie hierfür

$$\mu = nq \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{nq(1-q)},$$

wobei q die Erfolgswahrscheinlichkeit der Binomialverteilung und n die Anzahl an Durchführungen bezeichnet, d.h. die Verteilung in (b) ist $B(q, n)$.

Anmerkung: In (a), (b) und (c) ist es ausreichend, eine Formel aufzustellen und die Werte mithilfe eines Computeralgebrasystems auszurechnen (z.B. Mathematica von Wolfram Alpha).

Beispiel 42 **(2 Punkte)**

Sei X eine Gamma-verteilte Zufallsvariable mit Gestaltsparameter $a = n \in \mathbb{N}$ und Skalierungsparameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie für $x > 0$,

$$F_X(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

Beispiel 43 **(2 Punkte)**

Sie warten bei einer Einsichtnahme und vor Ihnen werden noch drei Studierende betreut.

(a) Wenn die Betreuungszeiten pro Studierenden unabhängig exponentialverteilt sind, kann die Wartezeit mit einer Gamma-Verteilung mit Parameter $a = 3$ und λ gleich dem Parameter λ der Exponentialverteilungen modelliert werden. Wenn eine Person im Durchschnitt zwei Minuten betreut wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie weniger als zehn Minuten warten?

(b) Angenommen die Anzahl der betreuten Studierenden ist Poisson-verteilt, wobei in zehn Minuten im Schnitt fünf Studierende betreut werden können. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in zehn Minuten zumindest drei Studierende betreut werden?