

**Beispiel 44**

(2 Punkte)

Sei  $(X, Y)$  ein diskreter zweidimensionaler Zufallsvektor, wobei  $X$  die Werte  $-1, 0, 1$  und  $Y$  die Werte  $0, 1$  annehmen kann. Folgende Wahrscheinlichkeiten bzw. Verhältnisse sind bekannt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = 1, Y = 0] &= 0.1, & \mathbb{P}[X = -1] &= 0.3, \\ \mathbb{P}[X = 1, Y = 1] &= 0, & \mathbb{P}[Y = 0] &= 0.5, \\ \mathbb{P}[X = 0, Y = 0] &= 3\mathbb{P}[X = -1, Y = 0].\end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitstabelle des Zufallsvektors  $(X, Y)$ , d.h. inklusive der Wahrscheinlichkeitsfunktionen und der Verteilungsfunktionen von  $X$  und  $Y$ .
- (b) Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?
- (c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable  $Z = X \cdot Y$ .
- (d) Berechnen Sie die Erwartung und die Varianz von  $Z$ .

**Beispiel 45**

(je 2 Punkte für a + b + c und d + e + f)

Wir werfen zwei faire sechsseitige Würfel, die allerdings nicht die Zahlen von 1 bis 6 auf den Seitenflächen haben. Der erste besitzt die Augenzahlen  $1, 1, 2, 3, 3, 4$  und der zweite Würfel hat die Augenzahlen  $1, 2, 2, 2, 3, 3$ . Sei  $X$  die resultierende Augenzahl des ersten Würfels und  $Y$  die resultierende Augenzahl des zweiten Würfels.

- (a) Bestimmen Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitstabelle des Zufallsvektors  $(X, Y)$ , d.h. inklusive der Wahrscheinlichkeitsfunktionen und der Verteilungsfunktionen von  $X$  und  $Y$ .
- (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von  $X$  und  $Y$ .
- (c) Bestimmen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von  $X$  und  $Y$  (siehe Seite 80/81 im Skriptum).
- (d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable  $Z = X + Y$ .
- (e) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von  $Z$ .
- (f) Wir spielen folgendes Spiel: Falls  $Z$  kleiner oder gleich drei ist, verlieren Sie drei Euro, falls  $Z$  gleich vier ist, gewinnen Sie zwei Euro und in allen anderen Fällen gewinnen Sie einen Euro.
  - (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie ein Spiel?
  - (ii) Berechnen Sie die erwartete Bilanz eines Spiels.

**Beispiel 46**

(je 2 Punkte für a + b + c und d + e + f)

Sei  $(X, Y)$  ein stetiger zweidimensionaler Zufallsvektor mit der folgenden Dichtefunktion:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{wenn } x, y \in [0, 1] \text{ und } 0 \leq x + y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeichnen Sie den Bereich in  $\mathbb{R}^2$ , in dem  $f_{X,Y}(x, y) > 0$ .
- (b) Bestimmen Sie  $k$ , sodass  $f_{X,Y}(x, y)$  wirklich eine Dichtefunktion ist.
- (c) Berechnen Sie die Randdichten und Randverteilungen von  $X$  und  $Y$ .
- (d) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?
- (e) Berechnen Sie Erwartung und Varianz von  $X$  und  $Y$ .
- (f) Berechnen Sie  $\mathbb{P}[X > Y]$ ,  $\mathbb{P}[Y > X]$  und  $\mathbb{P}[3X < Y]$ .