Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2022/2023

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

11. Übungsblatt – 17. Jänner 2023

Beispiel 47 **(2 Punkte für a + b + c und d + e + f)**

Sei (X,Y) ein stetiger zweidimensionaler Zufallsvektor mit folgender Dichtefunktion:

$$f_Z(z) = \begin{cases} ky^2 & \text{wenn } -1 < y < 0 \leq x \leq 1, \\ kxy & \text{wenn } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Bereich in $\mathbb{R}^2$, in dem $f_{X,Y}(x,y) > 0$.

(b) Bestimmen Sie die Konstante k, sodass $f_{X,Y}(x,y)$ wirklich eine Dichtefunktion ist.

(c) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

(d) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und die Erwartung von X und Y.

(e) Bestimmen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

(f) Berechnen Sie $\mathbb{P}[Y^2 > X]$.

Beispiel 48 **(2 Punkte)**

Sei (X,Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $\operatorname{Var}(aX + bY) = a^2 \operatorname{Var}(X) + b^2 \operatorname{Var}(Y) + 2ab \operatorname{Cov}(X,Y)$.

(b) $\operatorname{Cov}(aX + b, Y) = a \operatorname{Cov}(X,Y)$.

(c) Wenn $a \neq 0$, dann gilt $\rho(aX + b, Y) = \frac{a}{|a|}\rho(X,Y)$.

Beispiel 49 **(2 Punkte)**

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit $-\infty < \mathbb{E}(X^n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die symmetrisch um 0 ist, d.h. die Dichte f_X erfüllt $f_X(x) = f_X(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X^k) = 0$ wenn k ungerade ist. Folgern Sie daraus, dass die Kovarianz von X und X^2 gleich 0 ist, obwohl X und X^2 offensichtlich nicht unabhängig sind.

Beispiel 50 **(2 Punkte)**

Seien X und Y unabhängig binomialverteilt mit den Parametern m, $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$, das heißt,

$$X \sim B(m,p) \quad \text{und} \quad Y \sim B(n,p).$$

Finden Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable $Z = X + Y$. Welche Verteilung hat Z?

Hinweis: Verwenden Sie **Beispiel 9**.