Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2022/2023

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

12. Übungsblatt – 24. Jänner 2023

Beispiel 51 **(2 Punkte)**

Seien X und Y unabhängig exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda > 0$ und $\mu > 0$, wobei $\lambda \neq \mu$, das heißt,

$$X \sim Exp(\lambda) \quad \text{und} \quad Y \sim Exp(\mu).$$

Finden Sie die Verteilungsfunktion von $Z = X + Y$.

Beispiel 52 **(2 Punkte)**

Die Anzahl der Fahrzeuge, die eine Fabrik in einem Tag produziert, ist eine Zufallsvariable A mit Erwartungswert 50 und Varianz 25.

(a) Verwenden Sie die Markov-Ungleichung um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass in einem Tag weniger als dreißig Fahrzeuge produziert werden.

(b) Verwenden Sie die Tschebyschev-Ungleichung um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass die Anzahl der an einem Tag produzierten Fahrzeuge zwischen vierzig und sechzig liegt.

Beispiel 53 **(2 Punkte)**

Eine Maschine benötigt für ihre Funktion ein Bauteil, das sofort ersetzt werden muss, wenn die Abnützung zu groß ist. Die Dauer, die ein Bauteil verwendet werden kann, ist eine exponentialverteilte Zufallsvariable T mit Parameter $\lambda = 0.1$ pro Tag. Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Anzahl der Ersatzbauteile, die vorrätig sein müssen, damit die Maschine zu 97% zweitausend Tage betrieben werden kann.

Beispiel 54 **(2 Punkte)**

Bei der Corona-Impfstudie von BioNTech und Pfizer wurde (etwa) 39 000 Personen der Impfstoff verabreicht (siehe Beispiel 41). Es wird angenommen, dass der Impfstoff einen Wirkungsgrad von 80% hat, das heißt, wenn eine Person mit Coronaviren in Kontakt kommt, wird sie nur zu 20% krank. Sei X die Anzahl der Personen, die im Laufe der Studie an Covid erkranken. Unter der Annahme, dass alle geimpften Personen mit Coronaviren in Kontakt kommen, berechnen Sie ein symmetrisches Intervall um die erwartete Anzahl erkrankter Personen, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass X in diesem Intervall liegt, 95% beträgt.

Beispiel 55 **(2 Punkte)**

Frau Schmerzliebhaber besucht ihre Ärztin im Durchschnitt neun Mal pro Monat. Die Anzahl der Besuche sei durch einen homogenen Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ modelliert, wobei $t = 1$ einem Monat entspricht und $t = 0$ dem Beginn des Jahres.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

 (i) in den ersten zwei Monaten genau 18 Besuche stattfinden? Vereinfachen Sie die Berechnung mit Hilfe der Stirlingformel: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

 (ii) in den ersten zwei Monaten mehr als zehn Besuche stattfinden, wenn im ersten Monat sechs Besuche stattfinden?

(b) Wie viele Besuche sind in den ersten zweihundert Tagen zu erwarten? (Wir nehmen vereinfacht an, dass jeder Monat dreißig Tage hat.)