Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2022/2023

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

13. Übungsblatt – 31. Jänner 2023

Beispiel 56 **(je 2 Punkte für a + b + c und d + e + f)**

Wir modellieren die Anzahl von Anzeigen in Österreich, mit einem Poisson-Prozess, wobei im Schnitt 1100 Anzeigen pro Tag aufgenommen werden.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Woche mehr als 8500 Delikte zur Anzeige gebracht werden, wenn in den ersten vier Tagen der Woche nur 3700 Anzeigen aufgenommen wurden? Es ist ausreichend eine Formel aufzustellen.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aus (a) näherungsweise mit dem zentralen Grenzwertsatz.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Monat 30 000 Delikte zur Anzeige gebracht wurden, wenn im ganzen Jahr 350 000 Anzeigen aufgenommen wurden. Es ist ausreichend eine Formel aufzustellen.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise eine Anzahl n, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 94% weniger als n Anzeigen in einem Jahr getätigt werden.

(e) Nach wievielen Wochen und Tagen ist die dreihunderttausendste Anzeige zu erwarten?

(f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen der sechsten und zehnten Anzeige eines Tages mehr als sieben Minuten liegen?

Beispiel 57 **(je 2 Punkte für a + b + c + d und e + f + g + h)**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{a, b, c, d, e\}$. Folgende Übergangswahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$p(a,b) = p(b,a) = \frac{2}{3}, \quad p(a,d) = \frac{1}{3}, \quad p(b,b) = p(b,d) = p(b,e) = 0, \quad p(c,c) = 1,$$
$$p(d,c) = p(d,e), \quad p(d,c) + p(d,e) = 1, \quad p(e,c) = \frac{1}{4}, \quad p(e,e) = \frac{3}{4}.$$

Bestimmen Sie

(a) die Übergangsmatrix und den Übergangsgraphen der Markovkette.

(b) $\mathbb{P}[X_{17} = c \mid X_{14} = b]$.

(c) die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X_1 für eine Anfangsverteilung gegeben durch

$$\mathbb{P}[X_0 = a] = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_0 = d] = \frac{2}{3}.$$

(d) die absorbierenden Zustände, den Rand der Markovkette, ihre inneren Zustände und alle abgeschlossenen Mengen.

(e) rekurrente und transiente Zustände.

(f) für alle Zustände $i \in \{a, b, c, d, e\}$ die Absorptionswahrscheinlichkeit $P_i(R)$ für $R = \{c\}$ und die erwartete Schrittanzahl bis zur Absorption.

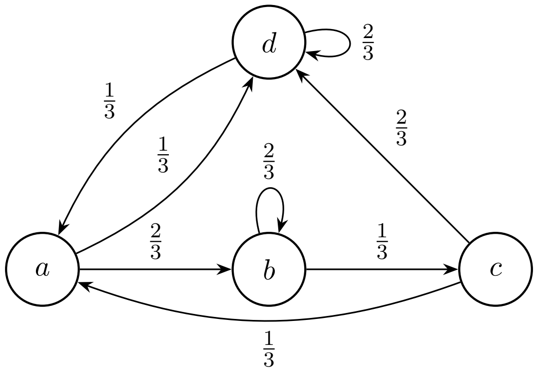
(g) für alle Zustände die Perioden und finden Sie damit die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X_{151} = a \mid X_0 = a].$$

(h) ob die Markovkette absorbierend, irreduzibel, aperiodisch, regulär ist.

Beispiel 58 **(2 Punkte)**

Wir betrachten die homogene Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{a, b, c, d\}$ gegeben durch den folgenden Übergangsgraphen:



(a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix.

(b) Zeigen Sie formal, dass die Markovkette regulär ist.

(c) Bestimmen Sie für jeden Zustand $i \in \mathcal{Z}$ die erwartete Rückkehrzeit.