

Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
26.01.2017

Kapitel XII: Markov Ketten

Ab jetzt betrachten wir stochastische Prozesse $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

1. **diskreter** Zeit $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$,
2. jedes X_n kann nur **endlich viele** verschiedene Werte in $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}_0$ annehmen.

Definition:

Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit dem endlichen Zustandsraum

$$\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\}$$

heißt **Markovkette**, falls für jede beliebige Wahl von $n \in \mathbb{N}_0$ und von Zuständen $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in \mathcal{Z}$, gilt:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n].$$

Bemerkung:

(a) Wenn man die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n]$$

betrachtet, wobei $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in \mathcal{Z}$, so nennt man

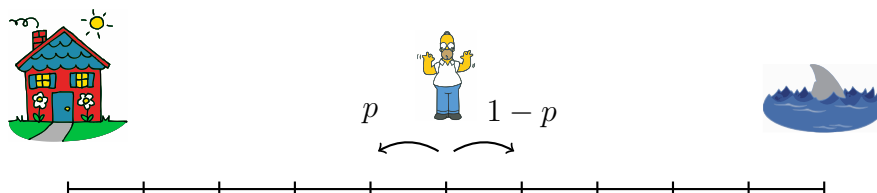
$$\begin{array}{ll} i_0, i_1, \dots, i_{n-1} & \text{Vergangenheit,} \\ i_n & \text{Gegenwart,} \\ i_{n+1} & \text{Zukunft.} \end{array}$$

(b) Die zukünftige Entwicklung einer Markov Kette hängt ausschließlich vom gegenwärtigen Zustand ab. Nicht von ihrer Vergangenheit.

Beispiel:

Ein Betrunkener geht mit Wahrscheinlichkeit p einen Schritt in Richtung seines Hauses, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ in die entgegengesetzte Richtung (zu einem See). Nach jedem Schritt vergisst er sofort in welche Richtung sein vorheriger Schritt ging.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er zuhause ankommt bevor er in den See fällt?



Definition:

- (a) Die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $i, j \in \mathcal{Z}$ heissen die **Übergangswahrscheinlichkeiten** der Markovkette.

- (b) Eine Markov-Kette heisst **homogen** wenn ihre Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von n abhängen.

Schreibweise: Für $i, j \in \mathcal{Z}$

$$p_{ij} = p(i, j) = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeit, dass man eine bestimmte Folge von Punkten $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{Z}^{n+1}$ mit der Markovkette in genau dieser Reihenfolge durchwandert, kann mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten $p(i, j)$ (unter Verwendung der Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten und mittels vollständiger Induktion beweisend) wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] &= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot \mathbb{P}[X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n | X_0 = i_0] \\ &\quad \vdots \\ &= \mathbb{P}[X_0 = i_0] \cdot p(i_0, i_1)p(i_1, i_2) \cdots p(i_{n-1}, i_n) \end{aligned}$$

Definition: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette auf $\mathcal{Z} = \{0, \dots, s\}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} .

- (a) Die $(s + 1) \times (s + 1)$ -Matrix

$$\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0s} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s0} & p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{pmatrix}$$

heisst **Übergangsmatrix** der Markovkette.

Bemerkung: die Zeilensummen von \mathbf{P} sind stets 1, d.h.,

$$\sum_{j=0}^s p_{ij} = 1 \quad \text{für alle } i \in \mathcal{Z}.$$

- (b) **n-stufige Übergangswahrscheinlichkeiten:** für $i, j \in \mathcal{Z}$:

$$p_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i]$$

- (c) **Verteilung von X_n :** für $i \in \mathcal{Z}$:

$$p_i^{(n)} = \mathbb{P}[X_n = i]$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass man sich zur Zeit n im Zustand i befindet. Man kann diese Wahrscheinlichkeiten zu einem Vektor in \mathbb{R}^{s+1} zusammenfassen:

$$\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_s^{(n)}).$$

(d) **Anfangsverteilung/Startverteilung:**

$$\mathbf{p}^{(0)} = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_s^{(0)}),$$

wobei für $i \in \mathcal{Z}$

$$p_i^{(0)} = \mathbb{P}[X_0 = i].$$

Bemerkung: Oft ist für X_0 deterministisch festgelegt, so dass $\mathbf{p}^{(0)}$ an genau einer Stelle eine 1 stehen hat und 0 an den restlichen Stellen.

Bemerkung: Durch die Startverteilung $\mathbf{p}^{(0)}$ und die Übergangsmatrix \mathbf{P} wird das Verhalten einer homogenen Markovkette vollständig festgelegt.

Bemerkung:

Alternative kann die Übergangsmatrix als sogenannter **Übergangsgraph** dargestellt werden.

Berechnung der Verteilung von X_n :

Wir definieren die $(s+1) \times (s+1)$ -Matrix der n -stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in \mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \cdots & p_{0s}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1s}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s0}^{(n)} & p_{s1}^{(n)} & p_{s2}^{(n)} & \cdots & p_{ss}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\mathbb{P}[X_n = j] = \sum_{i=0}^s \mathbb{P}[X_0 = i] \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i] = \sum_{i=0}^s p_i^{(0)} \cdot p_{ij}^{(n)}$$

bzw. in Vektorschreibweise

$$\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots, p_s^{(n)}) = \mathbf{p}^{(0)} \cdot \mathbf{P}^{(n)}.$$

Für $i, j, k \in \mathcal{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n = j, X_1 = k \mid X_0 = i] &= \frac{\mathbb{P}[X_n = j, X_1 = k, X_0 = i]}{\mathbb{P}[X_0 = i]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_0 = i, X_1 = k] \cdot \mathbb{P}[X_n = j \mid X_1 = k, X_0 = i]}{\mathbb{P}[X_0 = i]} \\ &= \mathbb{P}[X_1 = k \mid X_0 = i] \cdot \mathbb{P}[X_n = j \mid X_1 = k] \\ &= p_{ik}^{(1)} \cdot p_{kj}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i] = \sum_{k=0}^s \mathbb{P}[X_n = j, X_1 = k \mid X_0 = i] \\ &= \sum_{k=0}^s p_{ik}^{(1)} \cdot p_{kj}^{(n-1)}, \end{aligned}$$

bzw. in Vektorschreibweise ergibt dies mit Induktion (wegen $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}$):

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}^n.$$

Satz: (Chapman-Kolmogorov-Gleichung)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit der Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{Z}}$, wobei $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$. Ferner sei \mathbf{P}^0 die $(s+1) \times (s+1)$ -Einheitsmatrix und \mathbf{P}^n die n -te Potenz von \mathbf{P} . Dann gilt:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^s p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(m)} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0, \forall i, j \in \mathcal{Z}$$
$$\mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{P}^m \text{ (Matrizenprodukt!)}$$

Definition:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit der Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{Z}}$, und Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\}$.

- (a) Der Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heisst **absorbierend**, falls $p_{ii} = 1$.
(d.h., landet man einmal im Zustand i , kommt man von dort nicht mehr weg.)
- (b) Der **Rand** R der Markovkette besteht aus der Menge aller absorbierenden Zustände, d.h.

$$R = \{i \in \mathcal{Z} \mid p_{ii} = 1\}.$$

- (c) Die Menge der **inneren Zustände** der Markovkette ist die Menge aller Nicht-Randpunkte $\mathcal{Z} \setminus R$.
- (d) Die Markovkette heisst **absorbierend**, falls $R \neq \emptyset$ und R von *jedem* inneren Zustand in endlich vielen Schritten erreicht werden kann.
- (e) Sei $T \subseteq R$ und $i \in \mathcal{Z}$, dann bezeichnet $P_i(T)$ die **Absorptionswahrscheinlichkeit**, d.h., die Wahrscheinlichkeit dass nach endlich vielen Schritten ein Randpunkt aus der Menge T erreicht wird.
- (f) m_i sei die **erwartete Anzahl von Schritten**, um ausgehend vom Zustand i den Rand R zu erreichen.

Lemma:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene, absorbierende Markovkette mit der Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{Z}}$, wobei $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$. Sei $T \subseteq R$ und $i \in \mathcal{Z}$.

1. Für jede Absorptionswahrscheinlichkeit gilt:

$$P_i(T) = \sum_{j=0}^s p_{ij} P_j(T),$$

wobei $P_j(T) = 1$, falls $j \in T$, und $P_j(T) = 0$, falls $j \in R \setminus T$.

2. Erwartete Schrittzahl bis zur Absorption:

$$m_i = \begin{cases} 1 + \sum_{j=0}^s p_{ij} m_j, & \text{falls } i \in \mathcal{Z} \setminus R, \\ 0, & \text{falls } i \in R. \end{cases}$$

Klassifikation der Zustände:

Definitionen:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, s\}$.

- (a) Ein Zustand $j \in \mathcal{Z}$ heißt **erreichbar** von $i \in \mathcal{Z}$, falls es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i] > 0$.

d.h.: Falls im Übergangsgraphen ein Weg von i nach j existiert.

- (b) Die Markovkette heißt **irreduzibel**, falls für alle $i, j \in \mathcal{Z}$ gilt, daß i von j und j von i erreichbar sind.

- (c) Eine Menge $C \subseteq \mathcal{Z}$ heißt **abgeschlossen**, falls man von keinem $i \in C$ zu einem Zustand $j \in \mathcal{Z} \setminus C$ kommt.

d.h.: Falls im Übergangsgraphen kein Weg aus C herausführt.