Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
02.02.2017

Kapitel XII forts.: Markov Ketten (2)

Definition:

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, s\}$.

(a) Sei $i \in \mathcal{Z}$ und

$$M_i := \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}.$$

D.h.: M_i ist die Menge der längen aller möglichen Wege im Übergangsgraphen, die von i zurück zu i führen.

Die **Periode** von $i \in \mathcal{Z}$ ist

$$d_i := \begin{cases} \mathrm{ggT}(M_i), & \text{falls } M_i \neq \emptyset, \\ 0, & \text{falls } M_i = \emptyset. \end{cases}$$

(b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt **aperiodisch**, falls jeder Zustand die Periode 1 besitzt.

(c) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt **regulär**, falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aperiodisch und irreduzibel ist.

Bemerkung:

(a) Falls $p_{ii} > 0$ dann gilt $d_i = 1$.

(b) Man kann zeigen, dass wenn $d_i = 1$ dann existiert eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0 : \; p_{ii}^{(n)} > 0$.

Definition:

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, s\}$.

(a) Die **Wahrscheinlichkeit der ersten Rückkehr** zum Zustand $i \in \mathcal{Z}$ zur Zeit $n \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$f_i^{(n)} := \begin{cases} \mathbb{P}\big[X_n = i, \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} : X_k \neq i \mid X_0 = i\big], & \text{falls } n \geq 1, \\ 1, & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

(b) **Rückkehrwahrscheinlichkeit** zum Zustand $i \in \mathcal{Z}$:

$$f_i := \mathbb{P}\big[\exists n > 0 : X_n = i | X_0 = i\big] = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)}.$$

(c) Ein Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **rekurrent**, wenn $f_i = 1$.

D.h., wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 zu i zurückkehrt.

(d) Ein Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **transient**, wenn $f_i < 1$.

D.h. Wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit (nämlich $1-f_i$) nie wieder zu i zurückkehrt.

(e) Die Zufallsvariable T_i definiert als

$$T_i = \min\big\{n > 0 : X_n = i\big\},$$

heißt **Rückkehrzeit** zum Zustand $i \in \mathcal{Z}$.

Wenn die Markovkette nie zurückkehrt setzen wir $T_i = \infty$.

(f) Falls der Zustand $i \in \mathcal{Z}$ rekurrent ist, dann lässt sich die **erwartete Rückkehrzeit** berechnen als:

$$\mathbb{E}\big[T_i\big] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}[T_i = n | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_i^{(n)}.$$

(g) Ein rekurrenter Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **positiv rekurrent**, falls $\mathbb{E}\big[T_i\big] < \infty$.

(h) Ein rekurrenter Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **null-rekurrent**, falls $\mathbb{E}\big[T_i\big] = \infty$.

(i) Ein Zustand $i \in \mathcal{Z}$ heißt **ergodisch**, falls er aperiodisch und positiv rekurrent ist, d.h. falls $d_i = 1$ und $\mathbb{E}\big[T_i\big] < \infty$.

Bemerkung:

(a) Rekurrenz eines Zustandes $i \in \mathcal{Z}$ bedeutet dass die Markovkette diesen Zustand mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft besucht.

(b) Falls $|\mathcal{Z}| < \infty$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, dann sind alle Zustände positiv rekurrent.

(c) Seien $i, j \in \mathcal{Z}$ Zustände einer Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Falls j von i aus erreichbar ist, aber i **nicht** von j aus erreichbar ist, dann folgt i ist transient.

Grenzverhalten einer endlichen Markovkette

Frage: Wie verhält sich $\mathbf{p}^{(n)}$ für große n?

Satz: (Ergodensatz für reguläre Markovketten)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine *reguläre* Markovkette mit endlichem Zustandraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, s\}$ und Übergangsmatrix $\mathbf{P}$. Dann gilt:

(a) Die Potenzen der Übergangsmatrix konvergieren gegen eine Matrix $\mathbf{P}_\infty$ mit identischen Zeilen:

$$\mathbf{P}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_s \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_s \end{pmatrix},$$

wobei $p_i > 0$ für alle $i \in \mathcal{Z}$ und $\sum_{i=0}^{s} p_i = 1$ gilt.

(b) Der Zeilenvektor $\mathbf{p} = (p_0, p1, \ldots, p_s)$ von $\mathbf{P}_\infty$ ist der einzige stochastische Vektor (d.h. $\sum_{i=0}^{s} p_i = 1$) der die Gleichung

$$\mathbf{pP} = \mathbf{p}$$

erfüllt.

(c) Die erwartete Rückkehrzeit in den Zustand i ist gegeben durch:

$$\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{p_i}$$

(d) Unabhängig von der Startverteilung $\mathbf{p}^{(0)}$ gilt:

$$\mathbf{p} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(n)}.$$

Bemerkungen:

- Der Zeilenvektor $\mathbf{p}$ heisst **Grenzverteilung** der Markovkette.
  D.h., für großes n gilt:
  $$\mathbb{P}[X_n = i] \approx p_i.$$
- $\mathbf{p}$ ist ein (links)-Eigenvektor der Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ zum Eigenwert 1.