Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2016/2017

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

10. Übungsblatt; 10. Jänner 2017

---

52. **(1.5 Pkt.)**
Man betrachte die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X, Y), wobei X die Werte $1, 2, 3$ annehmen kann und Y die Werte $1, 2$. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$\mathbb{P}[X = 1, Y = 1] = 0.1,\ \mathbb{P}[X = 2, Y = 1] = 0.06,\ \mathbb{P}[X = 2, Y = 2] = 0.24,$$
$$\mathbb{P}[X = 1] = 0.5,\ \ \mathbb{P}[Y = 1] = 0.2$$

(a) Stellen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle von (X, Y) auf.
(b) Sind X und Y stochastisch unabhhängig?
(c) Bestimmen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten zu (X, Y).
(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $Z = X + Y$.

53. **(0.5 Pkt.)**
Der Zufallsvektor (X, Y) hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}[X = i, Y = j] = \frac{2}{n(n+1)}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{und } j = 1, \ldots i.$$

Man zeige, dass X und Y nicht unabhängig sind.

54. **(1 Pkt.)**
Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) habe folgende gemeinsame Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 3x, & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.
(b) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y, sowie $\varrho(X, Y)$. Sind X und Y unabhängig?

55. **(2 Pkt.)**
Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) habe folgende gemeinsame Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot y & \text{falls } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \text{ und } 0 \le x + y \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c, sodass $f_{X,Y}(x, y)$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.
(b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.
(c) Sind X und Y unabhängig?
(d) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
(e) Berechnen Sie $\mathbb{P}[3X < Y]$.

56. **(1 Pkt.)**
Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) hat die Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2 y} & \text{falls } 1 \le x \le \infty, \quad \frac{1}{x} \le y \le x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie lauten die Randdichten von X und Y?

57. **(1.5 Pkt.)**
Ein Benzintank habe am Beginn eines Monats den (zufälligen) Inhalt Y. Ein (zufälliger) Anteil X wird während des Monats verbraucht. Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) sei gegeben durch die Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{k^2} & \text{falls } 0 \leq x \leq y \leq k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei k die vorgegebene Kapazität des Tanks ist.

(a) Man zeige, dass $f_{X,Y}(x, y)$ tatsächlich eine Dichtefunktion darstellt.
(b) Wie lauten die Randdichte $f_X(x)$ und $\mathbb{E}[X]$?
(c) Man berechne $\mathbb{P}[X \leq \frac{k}{2}]$ und $\mathbb{P}[X \leq \frac{k}{2}, Y \geq \frac{3k}{4}]$.