

58. (1.5 Pkt.) Seien X_1, \dots, X_n unabhängige $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie mit Hilfe der Faltungsformel dass die Dichtefunktion der Summe $S_n = X_1 + \dots + X_n$ gegeben ist durch:

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Hinweis: Induktion nach n .)

59. (1 Pkt.) Eine Zufallsvariable X nehme nur Werte aus dem Intervall $[0, 12]$ an. Es gelte $\mathbb{E}[X] = 10$ und $\text{Var}(X) = 0.45$. Verwenden Sie die Tschebyschev-Ungleichung um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X \leq 7]$ nach oben abzuschätzen.
60. (1 Pkt.) Bei einem Glücksspiel gewinnt der Spieler mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ drei Euro hinzu. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ verliert er einen Euro, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gewinnt bzw. verliert er nichts. Bestimmen Sie approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, daß der Spieler nach 100 Spielen einen Gewinn zwischen 23 und 28 Euro erzielt hat.
61. (1 Pkt.) Die mittlere Lebensdauer eines Maschinenteils betrage 50 Tage mit einer Varianz von 900. Fällt dieses Maschinenteil aus, so wird es sofort durch ein Reserveteil ersetzt welches dieselbe mittlere Lebensdauer und Varianz besitzt. Wieviele Maschinenteile muss man vorrätig halten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 die Maschine mindestens ein Jahr (365 Tage) mit diesen Maschinenteilen läuft. (Hinweis: Wenden Sie den zentralen Grenzwertsatz an.)