

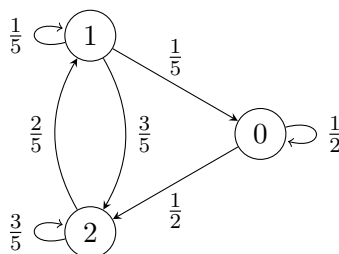
68. Sei $(X_n)_{n \geq \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$, wobei folgende Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sind:

$$p(0, 1) = p(1, 2) = 1, \quad p(2, 3) = \frac{1}{2}, \quad p(3, 1) = \frac{1}{4}, \quad p(2, 1) = p(3, 2) = 0,$$

$$p(3, 3) = p(3, 0), \quad p(2, 2) = \frac{1}{2}.$$

Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_0 = 1]$ und $\mathbb{P}[X_4 = 3 | X_0 = 0]$.

69. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf dem Zustandsraum $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ mit folgendem Übergangsgraphen:



- (a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix.
 (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}[X_3 = 2, X_2 = 0 | X_0 = 1], \quad \mathbb{P}[X_3 = 1 | X_0 = 0], \quad \mathbb{P}[X_3 \in \{1, 2\} | X_0 = 0].$$

- (c) Es sei folgende Anfangsverteilung gegeben:

$$\mathbf{p}^{(0)} = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right),$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_1 = 2]$ einmal mittels Matrizenmultiplikation und einmal mittels Aufzählen der möglichen Pfade.

- (d) Sei nun die Anfangsverteilung abhängig vom Parameter $\alpha \in [0, 1/2]$ wie folgt gegeben:

$$\mathbb{P}[X_0 = 0] = \alpha, \quad \mathbb{P}[X_0 = 1] = 2\alpha^2, \quad \mathbb{P}[X_0 = 2] = 1 - \alpha - 2\alpha^2.$$

Bestimmen Sie α derart, dass $\mathbb{P}[X_1 = 2]$ maximal wird.

70. Man betrachte die homogene Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Anfangsverteilung $\mathbf{p}^{(0)}$ derart, dass $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)}$ gilt.

71. Die Windstärke am Gipfel des Großglockners unterliegt täglichen Schwankungen. An einem Tag ist es entweder windstill, leicht windig, stark windig oder stürmisch. Aufgrund langjähriger Statistiken kann man folgende Wahrscheinlichkeiten:

- Auf einen windstillen Tag folgt mit 50% Wahrscheinlichkeit ein weiterer windstiller Tag, mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% ein leicht windiger Tag, und mit 20% ein stark windiger Tag.
- Auf einen leicht windigen Tag folgt mit 50% Wahrscheinlichkeit ein windstiller Tag, mit 30 % ein weiterer Tag mit leichtem Wind, und mit 20 % Wahrscheinlichkeit ein Tag mit starkem Wind.
- Auf einen stark windigen Tag folgt mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit ein windstiller, leicht windiger, stark windiger bzw. stürmischer Tag.
- Auf einen stürmischen Tag folgt mit 50% ein weiterer stürmischer Tag und mit je 25 % Wahrscheinlichkeit ein leicht windiger bzw. stark windiger Tag.

Modellieren Sie die Windstärke durch eine Markovkette $(X_n)_{\mathbb{N}_0}$, wobei X_n die Windstärke am n -ten Tag bezeichnet.

- Bestimmen Sie den Zustandsraum der Markovkette und geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix und den Übergangsgraphen an.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es spätestens 3 Tage nach einem windstillen Tag einen Stürmischen Tag gibt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen windstillen Tag, 3 weitere windstille Tage folgen?