Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
15.12.2016

Kapitel 8: Zufallsvektoren

Statt einem Merkmal werden häufig **mehrere** Merkmale gleichzeitig betrachtet, z.B. Körpergröße und Körpergewicht, Helligkeit und Lebensdauer von Glühbirnen, etc. Wir beschränken uns auf zwei Merkmale, wobei untenstehendes verallgemeinert werden kann auf n Merkmale.

Grundlegende Begriffe:

Definition: Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X,Y) ist eine Abbildung

$$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2.$$

Beispiel: Ein Würfel wird 4 Mal geworfen. D.h.

$$\Omega = \big\{(i_1,i_2,i_3,i_4) \mid i_1,i_2,i_3,i_4 \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\}.$$

X sei die Anzahl der geworfenen Sechsen; Y sei die Augensumme der 4 Würfe.

Definition: Die Verteilungsfunktion $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ eines Zufallsvektors (X,Y) ist gegeben durch

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}[X \le x, Y \le y].$$

Definition: (X,Y) ist ein diskreter Zufallsvektor, falls X und Y nur endlich viele oder abzählbar viele verschiedene Werte annehmen können. Falls $W_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ der Wertebereich von X ist und $W_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ der Wertebereich von Y, so ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben durch

$$p_{X,Y}(x_i,y_j) = \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \qquad x_i \in W_X, y_j \in W_Y.$$

Die Verteilungsfunktion von (X,Y) ist gegeben durch

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{\substack{x_i \in W_X: \\ x_i \le x}} \sum_{\substack{y_j \in W_Y: \\ y_j \le y}} \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \qquad x \in W_X, y \in W_Y.$$

Definition: (X,Y) ist ein stetiger Zufallsvektor, falls eine Funktion $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ge}$ existiert mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = 1$$

und

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t_1,t_2)\, dt_2\, dt_1.$$

$f_{X,Y}(x,y)$ wird dann die gemeinsame Dichte von (X,Y) genannt.

Eigenschaften der gemeinsamen Verteilungsfunktion:

1. $F_{X,Y}(x,y)$ ist in jeder Komponente monoton wachsend und rechtsseitig stetig: denn, falls $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$:

   $$F_{X,Y}(x_1,y_1) = \mathbb{P}[X \leq x_1, Y \leq y_1] \leq \mathbb{P}[X \leq x_2, Y \leq y_2] = F_{X,Y}(x_2,y_2).$$

   Die rechtsseitige Stetigkeit folgt analog wie im eindimensionalen Fall.

2. $$\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$$

   Denn:

   $$0 \leq \lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \leq \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}[X \leq x] = 0.$$

3. Analog:
   $$\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$$

4. $$\lim_{x\to\infty, y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$$

   Denn:

   $$\lim_{x\to\infty, y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{x\to\infty, y\to\infty} \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] = \mathbb{P}[X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}] = 1.$$

5. $$\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$$

   Denn:

   $$\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] = \mathbb{P}[X \in \mathbb{R}, Y \leq y] = \mathbb{P}[Y \leq y] = F_Y(y).$$

6. Analog:
   $$\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$$

7. Falls $f_{X,Y}$ stetig ist, so gilt:

   $$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,y).$$

Frage: Wie bekommt man aus der gemeinsamen Verteilung die Verteilungen von X und Y?

Definition: Sei (X, Y) ein Zufallsvektor. Dann sind die Randverteilungen von X und Y wie folgt gegeben:

1. Falls (X, Y) diskret ist:
   - Randverteilung von X:
   $$p_X(x_i) = \mathbb{P}[X = x_i] = \sum_{y \in W_Y} \mathbb{P}[X = x_i, Y = y] \qquad x_i \in W_X.$$
   - Randverteilung von Y:
   $$p_Y(y_j) = \mathbb{P}[Y = y_i] = \sum_{x \in W_X} \mathbb{P}[X = x, Y = y_i] \qquad y_i \in W_Y.$$
2. Falls (X, Y) stetig ist:
   - Randdichte von X (d.h. die Dichte von X):
   $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy \qquad x \in \mathbb{R}$$
   - Randdichte von Y (d.h. die Dichte von Y):
   $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx \qquad y \in \mathbb{R}$$

Definition: Sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor. Dann sind X und Y stochastisch unabhängig, falls für alle $x_i \in W_X$ und alle $y_j \in W_Y$ gilt:

$$\mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] = \mathbb{P}[X = x_i] \cdot \mathbb{P}[Y = y_j].$$

Definition: Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor. Dann sind X und Y stochastisch unabhängig, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Definition: Sei (X, Y) ein Zufallsvektor und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir:

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] = \begin{cases} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} g(x,y) \cdot \mathbb{P}[X = x, Y = y], & \text{falls } (X,Y) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx, & \text{falls } (X,Y) \text{ stetig} \end{cases}$$

$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right]$ ist definiert, falls die Summen bzw Integrale konvergieren!

Definition: Sei (X, Y) ein Zufallsvektor. Dann ist die <u>Kovarianz</u> von (X, Y) definiert als

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\big].$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\big] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

Definition: Sei (X, Y) ein Zufallsvektor. Dann ist der <u>Korrelationskoeffizient</u> von (X, Y) definiert als

$$\varrho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}.$$

Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß, das den linearen Zusammenhang zwischen X und Y widerspiegelt.

<u>Eigenschaften von Erwartung und Varianz von Zufallsvektoren:</u>

Im Folgenden sei (X, Y) ein Zufallsvektor, wobei $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1. $\boxed{\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]}$

   Denn: Falls X und Y diskret sind mit Wertebereichen W_X bzw. W_Y:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[aX + bY] &= \sum_{x_i \in W_X} \sum_{y_j \in W_Y} (ax_i + by_j)\mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \\ &= \sum_{x_i \in W_X} \sum_{y_j \in W_Y} ax_i \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] + \sum_{x_i \in W_X} \sum_{y_j \in W_Y} by_j \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \\ &= \sum_{x_i \in W_X} ax_i \mathbb{P}[X = x_i] + \sum_{y_j \in W_Y} by_j \mathbb{P}[Y = y_j] \\ &= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

   Falls X und Y stetig sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[aX + bY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ax f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} by f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ax f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} by f_Y(y)\, dy \\ &= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

2. $\boxed{Var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X,Y)}$

   Denn:

$$
\begin{aligned}
& Var(aX+bY) \\
= \;& \mathbb{E}\big[(aX+bY)^2\big] - \left(\mathbb{E}\left[aX+bY\right]\right)^2 \\
= \;& \mathbb{E}\left[a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2\right] - \big(a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]\big)^2 \\
= \;& a^2\mathbb{E}[X^2] + 2ab\mathbb{E}[XY] + b^2\mathbb{E}[Y^2] - a^2\mathbb{E}[X]^2 + 2ab\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + b^2\mathbb{E}[Y]^2 \\
= \;& a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2ab\; Cov(X,Y)
\end{aligned}
$$

3. $\boxed{\big|\varrho(X,Y)\big| \leq 1}$

   Denn: Dies kann mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung bewiesen werden:

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum x_iy_i\Big)^2 \leq \Big(\sum x_i^2\Big) \cdot \Big(\sum y_i^2\Big) \text{ bzw.} \\
&\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dy\Big)^2 \leq \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\,dx\Big) \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2\,dx\Big)
\end{aligned}
$$

4. $\boxed{\varrho(aX+b, cY+d) = \frac{ac}{|ac|}\varrho(X,Y), \varrho(X,X) = 1, \varrho(X,-X) = -1}$

Sind X und Y zusätzlich unabhänig, so gilt:

1. $\boxed{\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$

2. $\boxed{Cov(X,Y) = 0}$

3. $\boxed{\varrho(X,Y) = 0}$

4. $\boxed{Var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)}$

Aufgaben zu Zufallsvektoren:

1. Die diskreten Zufallsvariablen X und Y nehmen die Werte 0, 1 und 2 an. Es sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbb{P}[X=0,Y=1]=\frac{1}{16},\ \mathbb{P}[X=1,Y=0]=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}[X=1,Y=2]=\frac{1}{16},$$
$$\mathbb{P}[X=2,Y=0]=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}[X=2,Y=1]=\frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}[X=1]=\mathbb{P}[Y=0]=\frac{5}{16},\ \mathbb{P}[X=2]=\frac{7}{16}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y, sowie Erwartung und Varianz von X.

   (b) Sind X und Y unabhängig?

   (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen $Z = X + Y$.

   (d) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von (X, Y).

2. Man betrachte folgende Funktion, wobei $c \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x\cdot y^2, & \text{falls } 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie c so, daß $f(x, y)$ eine Dichtefunktion einer Zufallsvektors (X, Y) ist.

   (b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y, sowie die Erwartung und Varianz von X. Sind X und Y unabhängig?

   (c) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von (X, Y).