Wahrscheinlichkeit & stochastische Prozesse

KAPITEL I: Einführung, Motivation
Gesetz der großen Zahlen als Naturgesetz

- W!keit hat immer etwas mit Ungewissheit (Zufall) zu tun. WR soll vorhandene Unsicherheit kalkulierbar machen.

! Wahrscheinlichkeitstheorie macht den Zufall berechenbar.

Motivation: Standard Problemen der WR (W!keitsrechnung)

1) Glücksspiele (Teilungsproblem): 2 Spieler werden mitten in ihrem Glücksspiel beim Stand 4:3 für einen Spieler unterbrochen. Sie hatten verabredet, dass derjenige den Einsatz gewinnt, der zuerst 5 Pkt. hat. Wie sollen die beiden Spieler den Einsatz "gerecht" aufteilen?

2) Würfelprobleme
Warum kommt die Augensumme 11 beim Würfeln mit 3 Würfel häufiger vor als die Augensumme 12, obwohl - für beide Augensummen genau 6 Möglichkeiten gibt? (Chevalier de Méré)

3) St. Petersburger Paradox ("fairer Einsatz")
Spiel: jemand bieten Ihnen das folgende Spiel an:
er wirft eine Münze solange, bis zum 1^{en} mal "Zahl" oben liegt. Wenn dies beim ersten Wurf geschieht → erhalten Sie 1€

2^{en} Wurf → 2€

3^{en} Wurf → 4€ $= 2^2$

4^{en} Wurf → " — " 8€ $= 2^3$ usw.

Welchen Einsatz wären Sie bereit zu zahlen? Was wäre "fair"?

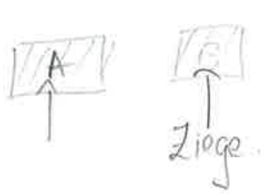
4) Tests
Eine Blutspenderin erhält nach Routineuntersuchung des Blutes, die Nachrich dass ein HIV-Test "positiv" reagiert habe. Ihr wurde mitgeteilt dass die Tests "fast" 100 % sicher sind. Wie groß ist die Gefahr, dass sie infiziert ist?

- W!keitstheorie liefert mathematische (rigorose) Antworten zu alldiesen Fragen!
→ Regeln und Hilfsmitteln zum rechnen mit W!keiten.

Stochastische Prozesse:
→ Versicherungen : Unfälle pro Jahr (Zählprozess)
(Versicherungsprämien Kalkulieren)

W!T : { Münzen spiele, Kartenspiele, Würfelspiele }

5) Ziegenproblem : Kandidat einer Quizshow steht vor 3 geschlossene Toren (Tor A, Tor B, Tor C). Hinter einem der Tore → Hauptpreis (Auto); hinten den 2 anderen Toren befindet sich jeweils eine Ziege. Der Kandidat soll sich für eins der Tore entscheiden. (was dahinten steht, darf behalten). → wählt Tor A. Moderator öffnet Tor B. Jetzt darf sich der Kandidat Tor A → bleiben oder zu Tor C wechseln?
→ Was ist besser?



A: Besser, zu C zu wechseln

Kapitel II : GRUNDBEGRIFFE DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

2.1 GRUNDBEGRIFFE

- Der wichtigsten Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein **Zufallsexperiment** (Experiment mit züfälligem Ausgang).

Def: **Zufallsexperiment** ist ein Experiment, bei dem die folgendem 3 Vorausetzungen erfüllt sind:
(1) Das Experiment lässt sich unter den gleichen Bedierungen beliebig oft wiederholen.
(2) Alle möglichen Ausgänge des Exp. sind bekannt (Elementarereign)
(3) Das Ergebnis einer Konkreter Durchführung des Exp. ist unvorhersehbar.

Def: **Zustandsraum** oder **Ergebnissmenge** / **Grundmenge** eines Zufallsexperiment = die Menge aller möglichen Ausgänge des Experiments;
Symbolische Schreibweise : Ω
Elemente von Ω (Ausgänge oder Elementarereignisse) : $\omega \in \Omega$,

Def: **Ereignisse** = Teilmengen von Ω (Zustandsraum)
$\mathcal{P}(\Omega)$ = Potenzmenge von Ω = die Menge aller Teilmengen von Ω; $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$ → Mächtigkeit von Ω
Ereignisse [A, B, C (Teilmengen einer Menge)]
disj[= Vereinigung von Elementarereignisse]

Beispiele:
1) Münze werfen (= Zufallsexp)
$\Omega = \{K, Z\}$
A = "Kopf ist gekommen" ; $A \subseteq \Omega$; B = "Zahl .."
$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{K\}, \{Z\}, \{K, Z\}\}$

2) "Würfeln"
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ "Augenzahl" oder "oben liegende Zahl"
A = "gerade Zahl gewürfelt" = $\{2, 4, 6\}$ {Elemereign die A beschreiben}

B = "vielfaches von 3 gewürfelt" = $\{3, 6\}$ = {Elementare reignisse die B beschreiben}
C = "die Zahl ist eine quadrat Zahl" = $\{1, 4\}$

3) Augenpaare beim Wurf mit 2 Würfeln

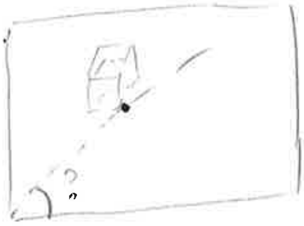
→ würfeln gleichzeitieh 2 Würfeln (z.B mit einem weißen und einem grauen Würfel, und notieren die Augenpaare).

Zustandsraum
Beispiele von Ereignissen
P [Ereignisse] ausrechnen

→ eventuell weglassen

4) Zustandsraum nicht diskret

Zufallsexperiment: Würfel auf einem Tisch geworfen; wir schauen uns den Winkel zwischen die vordere WürfelKante und die untere TischKante. Ergebnismenge (Zustandsraum) ist überabzählbare, Kontinuirliche Menge



$$\Omega = [0°, 90°]$$

Bemerkungen!

1) Zustandsraum Kann

→ diskrete Menge
(diskrete Zufallsexp)
 → endlich (Bsp 1, 2, 3)
 → unendlich (Bsp: Würfel solange gewürfelt bis zum ersten Mal 6 erscheint)

→ Kontinuirliche Menge (Bsp 4)
(Kont. Zufallsexp)

2) Ereignisse : A, B, C

i) Ereignis A ist eingetreten, wenn das Ergebnis des Zufallsexp. ein Element von A ist.

ii) Die leere Menge ϕ als auch den Zustandsraum Ω Teilmengen von Ω sind Mengen und somit Ereignisse mit folgender Bedeutung:

ϕ : enthält kein Element; symbolisiert unmögliches Ereignis (d.h. ein Ereignis, die nie eintreten kann)

Ω : enthält alle Elementarereignisse, sicheres Ereignis (d.h. ein Ereignis das immer eintritt)

iii) Ein Ereignis A ist entweder

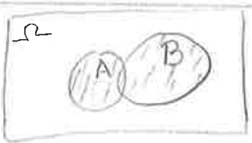
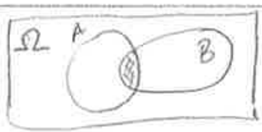
- ϕ (unmögliches Ereignis) oder
- Ω (sicheres Ereignis) oder
- ein Elementarereignis (enthält genau 1 Element von Ω)

oder

- eine disjunkte Vereinigung von Elementarereignissen.

3) VERKNÜPFUNGEN VON EREIGNISSE

Ereignisse sind Teilmengen der Zustandsraum Ω; sie lassen sich daher wie Mengen verknüpfen. => neue Ereignisse : Ω = Zustandsraum ; A, B = beliebige Ereignisse

Euler - Venn Diagramm	Bedeutung des zusammengesetztes Ereign.
1) A^c oder $\bar{A}$ 	Komplement von A = $\bar{A}$ = A tritt nicht ein. $\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$
2) $A \cup B$. 	Vereinigung von Ereignissen A und B: entweder tritt A ein oder B oder A und B gleichzeitig $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ oder $\omega \in B\}$
3) $A \cap B$ 	Durchschnitt von A und B : A und B treten gleichzeitig ein. $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ und $A \cap B\}$

Bem! Schließen sich 2 Ereignisse A, B gegenseitig aus, so gilt $A \cap B = \phi$ (A und B sind disjunkte Mengen)

De Morgan Regeln für Ereignisse

Für 2 beliebige Ereignisse A und B gilt:

1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

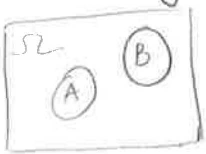
2.2 WAHRSCHEINLICHKEITEN

- wollen um jeden Ereignis $A \subseteq \Omega$ eine $\overbrace{\text{W'keit}}^{\text{Zahl}}$ $\mathbb{P}(A)$ zuorden, die bestimmte Regeln erfüllen sollte:

① $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
(als W'keiten kommen nur Zahlen zwischen 0 und 1 in Frage)

② $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = 100\%$ (das sichere Ereignis soll W'keit 1 haben)

③ Für $A \cap B = \emptyset$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
· für 2 disjunkte Ereignisse A, B : die W'keit der Vereinigung ist die Summe der W'keiten $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$



Def (W'keitsmaß) Eine Funktion $\mathbb{P} : \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\text{Ereignismenge (Potenzmenge)}} \to [0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, falls die 3 Eigenschaften erfüllt sind:

Ax 1 1) $\forall$ Ereignisse A : $\mathbb{P}(A) \geq 0$

Ax 2 2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Ax 3 3) Additivität: für Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ die paarweise disjunkt sind (i.e $A_i \cap A_j = \emptyset$, für $i \neq j$) gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Def: $(\Omega, \mathbb{P})$ heisst Wahrscheinlichkeitsraum (kurz W-Raum)