KAPITEL VIII: ZUFALLSVEKTOREN

- Bisher → Zufallsexp. bei denen die Beobachtung eines einzigen Merkmals im Vordergrund stand.
- In diesem Abschnitt → Einführung in Zufallsexp, bei denen gleichzeitig (oder auch mehr) Z.V. beobachtet werden. ⇒ zweidimensionale (oder mehrdimensionale) W'keitsverteilungen; die werden durch W'keitsfkt. oder Dichte fkt. beschrieben.

in Anwendungen wichtig: Summen und Produkten von (stochastisch unabhängigen) Z.V.

Bsp: Wir werfen gleichzeitig eine Münze und einen Würfel

$$X = \begin{cases} 0, & \text{falls Zahl} \\ 1, & \text{falls Kopf} \end{cases}$$

$Y =$ Augenzahl ; $Y \in \{1, 2, \ldots, 6\}$

$\Rightarrow 2 \times 6 = 12$ Elementarereignisse

$(X,Y) \to$ Zufallsvektor

$$(X,Y) \in \left\{ \begin{matrix} (0,1), (0,2) \ldots, (0,6) \\ (1,1)\ (1,2), \ldots\ (1,6) \end{matrix} \right\}$$

Grundbegriffe:

Def: Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X,Y) ist eine Abbildung $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Def Gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ von (X,Y) ist gegeben durch:

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x \cap Y \leq y].$$

★ (X,Y) diskret

<u>Def</u>: Ein Zufallsvektor (X,Y) heißt diskret falls X und Y diskrete Z.V sind.

sei $W_X = \{x_1, x_2 \ldots\}$ → Wertebereich von X

$W_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ → Wertebereich von Y.

Wahrscheinlichkeitsfkt. von (X,Y) (W-Fkt. von (X,Y))

ist definiert durch: $p_{X,Y} : W_X \times W_Y \to [0,1]$

mit $p_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j]$, $\forall\, x_i \in W_X$, $y_j \in W_Y$

- Dann ist Verteilungsfkt $F_{X,Y}$:

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{\substack{x_i < x \\ x_i \in W_X}} \sum_{\substack{y_j < y \\ y_j \in W_Y}} \underbrace{\mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j]}_{p_{X,Y}(x_i, y_j)}$$

- $p_{X,Y}$ auch diskrete Dichte genannt.

★ (X,Y) stetig

<u>Def</u>: Ein zweidim. Zufallsvektor (X,Y) heißt stetig falls es eine Fkt. $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert sodaß

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

- $f_{X,Y}$ heißt gemeinsame Dichte von (X,Y)

Eigenschaften

(X,Y) diskret:

$p_{X,Y} \geq 0$

$\sum_{x_i \in W_X} \sum_{y_j \in W_Y} p_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$

(X,Y) stetig

$f_{X,Y} \geq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$

Eigenschaften der gemeinsam Verteilungsfkt $F_{X,Y}$ von (X,Y)

(auf Folie detaliert)

1. $F_{X,Y}(x,y) \rightarrow$ in jeder Komponente monoton wachsend und rechtseitig stetig.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

3. $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

4. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to +\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1.$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$

6. $\lim\limits_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$

7. Falls $f_{X,Y}$ stetig ist, dann

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,y)$$

Frage: Wie bekommt man die Verteilungen von X und Y aus der gemeinsamen Verteilung von (X,Y)

Def: Sei (X,Y) ein Zufallsvektor. Dann sind die Randverteilungen von X und Y wie folgt gegeben:

(1) (X,Y) diskret mit gemeinsame W-Fkt $p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}[X=x, Y=y]$ dann ist.

- Randverteilung von X p_X

$$\mathbb{P}[X=x_i] = p_X(x_i) = \sum_{y_j \in W_Y} \mathbb{P}[X=x_i, Y=y_j]$$

- Randverteilung von Y

$$\mathbb{P}[Y=y_j] = p_Y(y_j) = \sum_{x_i \in W_X} \underbrace{\mathbb{P}[X=x_i, Y=y_j]}_{p_{X,Y}(x_i,y_j)}$$

(2) (X,Y) stetig; $f_{X,Y}$ gemeinsame Dichte von (X,Y)

- Randdichte von X: (d.h Dichte von X)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

- Randdichte von Y (d.h Dichte von Y)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Def: Sei (X,Y) Zufallsvektor. X und Y heißen stochastisch unabhängig falls:

(1) (X,Y) diskret: $\underbrace{p_{X,Y}(x_i,y_j)}_{\mathbb{P}[X=x_i, Y=y_j]} = \underbrace{p_X(x_i)}_{\mathbb{P}[X=x_i]} \cdot \underbrace{p_Y(y_j)}_{\mathbb{P}[Y=y_j]}$, $\forall x_i \in W_X$, $\forall y_j \in W_Y$

(2) (X,Y) stetig: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

Erwartungswert von $g(X,Y)$

Def: Sei (X,Y) Zufallsvektor und $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Dann

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} g(x,y) \underbrace{\mathbb{P}[X=x, Y=y]}_{p_{X,Y}(x,y)}, & \text{falls } (X,Y) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy, & \text{falls } (X,Y) \text{ stetig.} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}[g(X,Y)]$ ist definiert, falls die Summen bzw Integrale Konvergieren!

Def: Für (X,Y) Zufallsvektor, Covarianz von (X,Y) ist

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$$
$$= \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

und Korrelationskoeffizient $\rho(X,Y)$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}}$$

Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz (Details auf Folie)

$(X,Y) \to$ Zufallsvektor mit $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. $\mathbb{E}[aX + bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2 \mathrm{Var}(X) + b^2 \mathrm{Var}(Y) + 2ab\, \mathrm{Cov}(X,Y)$
3. $|\rho(X,Y)| \le 1$.
4. $\rho(aX+b, cY+d) = \frac{ac}{|ac|} \rho(X,Y)$

90

Aufgaben zu Zufallsvektoren:

1. Die diskreten Zufallsvariablen X und Y nehmen die Werte 0, 1 und 2 an. Es sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbb{P}[X=0,Y=1]=\frac{1}{16},\ \mathbb{P}[X=1,Y=0]=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}[X=1,Y=2]=\frac{1}{16},$$
$$\mathbb{P}[X=2,Y=0]=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}[X=2,Y=1]=\frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}[X=1]=\mathbb{P}[Y=0]=\frac{5}{16},\ \mathbb{P}[X=2]=\frac{7}{16}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y, sowie Erwartung und Varianz von X.

   (b) Sind X und Y unabhängig?

   (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen $Z = X + Y$.

   (d) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von (X, Y).

2. Man betrachte folgende Funktion, wobei $c \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x\cdot y^2, & \text{falls } 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie c so, daß $f(x, y)$ eine Dichtefunktion einer Zufallsvektors (X, Y) ist.

   (b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y, sowie die Erwartung und Varianz von X. Sind X und Y unabhängig?

   (c) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von (X, Y).

Satz: Falls X, Y zusätzlich unabhängig, dann:

(1) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

(2) $Cov(X, Y) = 0$

(3) $\rho(X, Y) = 0$

(4) $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$

Aufgaben Zufallsvektoren [Angaben auf Folien]

$\boxed{\text{Bsp 1}}$ $X \in \{0, 1, 2\}$ $Y = \{0, 1, 2\}$

Y \ X	0	1	2	$P[Y=j]$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
$P[X=i]$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

a) $P[X=1] = P[Y=0] = \frac{5}{16}$; $P[X=2] = \frac{7}{16}$

- $p_X(1) = P[X=1] = \sum_{i=0}^{2} P[X=1, Y=i] \Leftrightarrow \frac{5}{16} = \frac{1}{8} + P[X=1, Y=1] + \underbrace{P[X=1, Y=2]}_{\frac{1}{16}} \Rightarrow \boxed{P[X=1, Y=1] = \frac{5}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8}}$

- $p_X(2) = \underbrace{P[X=2]}_{\frac{7}{16}} = \underbrace{P[X=2, Y=0]}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{P[X=2, Y=1]}_{\frac{1}{4}} + P[X=2, Y=2]$

$\Rightarrow P[X=2, Y=2] = \frac{7}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7-2-4}{16} = \frac{1}{16}$

- $p_Y(0) = \underbrace{P[Y=0]}_{\frac{5}{16}} = \underbrace{P[Y=0, X=0]}_{?} + \underbrace{P[Y=0, X=1]}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{P[Y=0, X=2]}_{\frac{1}{8}}$

$\Rightarrow \quad \mathbb{P}[Y=0, X=0] = \frac{5}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

$\mathbb{P}[X=0] = 1 - \mathbb{P}[X=1] - \mathbb{P}[X=2] = 1 - \frac{5}{16} - \frac{7}{16} = \frac{4}{16}$

Aber

$\underbrace{\mathbb{P}[X=0]}_{\frac{4}{16}} = \underbrace{\mathbb{P}[X=0, Y=0]}_{\frac{1}{16}} + \underbrace{\mathbb{P}[X=0, Y=1]}_{\frac{1}{16}} + \underbrace{\mathbb{P}[X=0, Y=2]}_{?} \Rightarrow$

$\mathbb{P}[X=0, Y=2] = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$

$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{4}{16} + 1 \cdot \frac{5}{16} + 2 \cdot \frac{7}{16} = \frac{19}{16}$

$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \cdot \frac{4}{16} + 1^2 \cdot \frac{5}{16} + 2^2 \cdot \frac{7}{16} = \frac{33}{16}$;

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{33}{16} - \left(\frac{19}{16}\right)^2 = \frac{167}{236}$

b) X und Y unabhängig, falls

$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad , \forall x \in \{0,1,2\}$
$\qquad y \in \{0,1,2\}$

$p_{X,Y}(0,0) = \mathbb{P}[X=0, Y=0] = \frac{1}{16}$

Aber

$p_X(0) = \frac{4}{16}$ und $p_Y(0) = \frac{5}{16}$

$\Big\} \quad \frac{1}{16} \neq \frac{4}{16} \cdot \frac{5}{16}$

$\Rightarrow$ X und Y nicht unabhängig.

c) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \frac{19}{16} + \frac{15}{16} = \frac{17}{8}$

$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \frac{5}{16} + 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$

W-Fkt von $Z \in \{0, 1, 2, 3, 4,$

Z	0	1	2	3	4	
$p_Z(i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\sum = 1$

$\mathbb{P}[Z=0] = \mathbb{P}[X+Y=0] = \mathbb{P}[X=0, Y=0] = p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{16}$

$\mathbb{P}[Z=1] = \mathbb{P}[X=0, Y=1] + \mathbb{P}[X=1, Y=0] = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}[Z=2] = \mathbb{P}[X=1, Y=1] + \mathbb{P}[X=0, Y=2] + \mathbb{P}[X=2, Y=0] =$

$= \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{1}{8} = \frac{6}{16}$

$\mathbb{P}[Z=3] = + \mathbb{P}[X=1, Y=2] + \mathbb{P}[X=2, Y=1]$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

$\mathbb{P}[Z=4] = \mathbb{P}[X=2, Y=2] = \frac{1}{16}$

d) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\frac{19}{16}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{\frac{15}{16}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{-29}{256}}$

$X \cdot Y \in \{0, 1, 2, 4\}$

$\mathbb{E}[X \cdot Y] = 1 \cdot \frac{2}{16} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) + 4 \cdot \frac{1}{16} = 1$

$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{-29}{256}}{\sqrt{\frac{167}{256}} \cdot \sqrt{\frac{143}{256}}} = -0{,}187$

<u>Bsp (2)</u>: $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot y^2, & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

<u>Achtung</u>: Grenzen des Integrals ! häufige Fehler

a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \overset{!}{=} 1$

und

$f_{X,Y}(x,y) \ge 0, \forall x,y \in \mathbb{R}^2$

94

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_x^1 (c\,x\,y^2)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 cx\left(\frac{y^3}{3}\Big|_x^1\right)dx = \int_0^1 cx\left(\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}\right)dx = \int_0^1\left(c\frac{x}{3} - c\frac{x^4}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{c}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{c}{6} - \frac{c}{15} = c\,\frac{5-2}{30} = c\,\frac{1}{10} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow$$

$\boxed{c=10}$; Für $c=10$, $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ ✓

b) Randdichten von X und Y.

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 10\,x\,y^2\,dy = 10x\frac{y^3}{3}\Big|_x^1 = 10x\left(\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{10}{3}\left(x - x^4\right)$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 10xy^2\,dx = 10y^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^y = 5y^2\left(y^2-0\right) = 5y^4$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x\,f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot\frac{10}{3}\left(x-x^4\right)dx = \frac{5}{9}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\frac{10}{3}\left(x-x^4\right)dx = \frac{5}{14}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 = \frac{5}{14} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{55}{1134}$$

X und Y sind nicht unabhängig, da

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{10xy^2} &\neq f_X(x)\,f_Y(y) \\ &\neq \frac{10}{3}\left(x-x^4\right)\cdot 5y^4 \end{aligned}\right\} \text{X und Y abhängig.}$$

c) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X\cdot Y] - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\checkmark} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{\checkmark}$

$$\mathbb{E}[X\cdot Y] = \int_0^1\int_x^1 xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 10\int_0^1\int_x^1 x^2y^3\,dy\,dx =$$

$$= 10\int_0^1 x^2\left(\frac{y^4}{4}\Big|_x^1\right)dx = 10\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{10}{4}\int_0^1 (x^2 - x^6)\,dx$$

$$= \frac{10}{4}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{10}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right) = \frac{10}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{21} = \frac{10}{21}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\cdot 5y^4\,dy = \frac{5}{6} \\ \mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 y^2 f_Y(y)\,dy = \frac{5}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Var}(Y) = \frac{5}{7} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{252}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{10}{21} - \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{378}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\cdot\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{5}{378}}{\sqrt{\frac{55}{1134}\cdot\frac{5}{252}}} = \sqrt{\frac{2}{11}}$$