Satz (Faltungsformel)

(a) Seien X, Y unabhängige ZV die Werte in $\mathbb{N}_0$ annehmen.

$Z = X+Y$

Es gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\underline{\mathbb{P}[Z=k]} = \mathbb{P}[X+Y=k] = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X=i, Y=k-i] =$$

$$= \underline{\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X=i] \cdot \mathbb{P}[Y=k-i]}$$

b) Seien X, Y unabhängige stetige ZV $: \Omega \to \mathbb{R}$ und $Z = X, Y$

dann gilt für $z \in \mathbb{R}$

$$\underline{f_Z(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\,dy = \underline{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \underline{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,dx}$$

Beispiel:

(a) Poisson-Verteilung: Seien $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\lambda)$ unabhängig

$$P_X(k) = P_Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

$Z = X+Y$

$$\mathbb{P}[Z=k] = \sum_{i=0}^{k} P_X(i) P_Y(k-i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda^k \cdot e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \frac{1}{(k-i)!} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{i!(k-i)!}}_{\binom{k}{i}}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-2\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 1^i \cdot 1^{k-i}}_{2^k} = \frac{(2\lambda)^k}{k!} e^{-(2\lambda)}$$

$\Rightarrow Z \sim P(2\lambda)$ Allgemein: $X_i \sim P(\lambda)$ u.e $\Rightarrow Z = X_1 + \ldots + X_n \sim P(n\lambda)$

(2)

Allgemein: $X_1, \dots, X_n$ alle $P(\lambda)$ verteilt und unabhängig

$\Rightarrow Z = X_1 + \dots + X_n \sim P(n\lambda)$

b) Normalverteilung

Seien $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$, unabhängig

dann folgt

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i , \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[S_n] = \mu_1 + \dots + \mu_n$

$Var(S_n) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$

Kapitel IX: Grenzwertsätze

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte ZVen
i.i.d (independent, identically distributed)

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \quad \text{arithmetisches Mittel}$$

Frage: Wie verhält sich die ZV $\overline{X}$ wenn n groß wird?

Wir benötigen einen Grenzwertbegriff für Zufallsvariablen.

Satz (Markov Ungleichung)

Sei Y eine ZV so dass $\mathbb{E}[|Y|^r]$ existiert, dann gilt

$$\forall a>0: \quad \mathbb{P}[|Y| \geq a] \leq \frac{1}{a^r}\mathbb{E}[|Y|^r]$$

Beweis: Y diskret, $Y: \Omega \to W_Y$

$$\mathbb{E}[|Y|^r] = \sum_{y \in W_Y} |y|^r \, \mathbb{P}[Y=y] = \sum_{\substack{y \in W_Y \\ |y| \geq a}} \underbrace{|y|^r}_{\geq a^r} \mathbb{P}[Y=y] + \underbrace{\sum_{\substack{y \in W_Y \\ |y|<a}} |y|^r \, \mathbb{P}[Y=y]}_{\geq 0}$$

$$\geq a^r \sum_{\substack{y \in W_Y \\ |y| \geq a}} \mathbb{P}[Y=y] = a^r \cdot \mathbb{P}[|Y| \geq a]$$

□

Satz (Tschebyschev-Ungleichung)

X-ZV mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ dann gilt $\forall a>0$

$$\mathbb{P}[|X-\mu| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

(4)

<u>Beweis:</u> $Y = X - E(X) \quad , r = 2 \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0$

$Var(Y) = Var(X - \mathbb{E}[X]) = Var(X)$

Markov-Ungleichung $\Rightarrow$

$Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \underbrace{\mathbb{E}[Y]^2}_{=0} = \mathbb{E}[Y^2]$

$$\mathbb{P}[|X - \mu| \geq a] \leq$$

$$\mathbb{P}[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{Var(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

<u>Def:</u> Stochastische Konvergenz

Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von ZVen.
X_n konvergiert stochastisch gegen einen Wert $c \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}[|X_n - c| > \varepsilon] \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

<u>Satz</u> (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Seien X_i unabhängige ZV mit $E[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$, dann konvergiert $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ stochastisch gegen μ.

d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}[|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon] = 0$

<u>Beweis:</u> $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]) = \mu$

$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} Var(X_1 + \dots + X_n) =$$

$$\overset{\text{unabh.}}{=} \frac{1}{n^2}(Var(X_1) + \dots + Var(X_n)) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mathbb{P}[|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon] \leq \mathbb{P}[|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\square$

Der zentrale Grenzwertsatz

Satz (zentraler Grenzwertsatz)

Seien X_i unabhängige und identisch verteilte ZV mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$

Sei $S_n = X_1 + \dots + X_n$

$\mathbb{E}[S_n] = n\mu$
$Var(S_n) = n\sigma^2$

Die standardisierte Summe

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

strebt für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung $N(0,1)$

d.h. Für die Verteilungsfunktion F_{Z_n} von Z_n gilt

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(z) = \phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgt

$X_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ wird durch die

Normalverteilung $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ approximiert.

Da $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \underbrace{Z_n}_{\approx N(0,1)} + \mu \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\mathbb{E}[\overline{X_n}] = \mu$
$Var(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$

<u>Beispiel:</u> $X_i \sim \mathcal{P}(1)$ Poisson mit $\lambda = 1$

$S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda) = \mathcal{P}(n)$ $\mathbb{P}[S_n = k] = \frac{n^k}{k!} e^{-n}$

<u>Frage:</u> $\mathbb{P}[380 \leq S_{400} \leq 420] = \sum_{k=380}^{420} \frac{400^k}{k!} e^{-400} = 0{,}6947$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = \mathbb{E}[X_i] = 1 \\ \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad S_n = \sqrt{n}\,\sigma Z_n + n\mu$$

$$S_n = \sqrt{n} Z_n + n \quad \Rightarrow \quad \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = Z_n$$

$$\mathbb{P}[380 \leq S_{400} \leq 420] = \mathbb{P}[-20 \leq S_{400} - 400 \leq 20]$$

$$= \mathbb{P}\left[-1 \leq \frac{S_{400} - 400}{\sqrt{400}} \leq 1\right] \approx \mathbb{P}[-1 \leq N \leq 1] = \mathbb{P}[N \leq 1] - \underbrace{\mathbb{P}[N \leq -1]}_{\substack{= \mathbb{P}[N \geq 1] \\ = 1 - \mathbb{P}[N \leq 1]}}$$

mit $N \sim N(0,1)$

$$= 2\mathbb{P}[N \leq 1] - 1 = 2\Phi(1) - 1 = 0{,}685$$

$\Phi(1) = 0{,}8427$