Satz [Eigenschaften W'maß]

Für beliebige Ereignisse A, B, A_i $(i = 1,2,\dots n)$:

1. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. Wenn $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ [Speziell $\mathbb{P}(A) \leq 1$]
3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ [Siebformel von Poincaré]

Beweis (eventuell als Hü geben)

① $\Omega = A \cup \bar{A}$ & $A \cap \bar{A} = \emptyset \overset{\text{Axiom 3}}{\Rightarrow} 1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

②

$B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$

$(B \setminus A)$ und $(B \cap A)$ disjunkte Ereignisse $\overset{\text{Ax 3}}{\Rightarrow}$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(\underbrace{B \cap A}_{A}) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0 \text{ (Ax 1)}}$

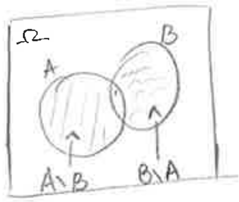
$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

③ Analog zu 2. $A = \underbrace{(A \setminus B) \cup (A \cap B)}_{\text{disjunkt}} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

④



$A \cup B = (A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \underbrace{\mathbb{P}(A \setminus B)}_{\text{aus 3: } \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)} + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\text{aus 3: } \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)} + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

⑤ Weg (ohne Beweis)

2.3 LAPLACE - WAHRSCHEINLICHKEITEN

Bem.: beim würfeln mit einem normalem Spielwürfel wollen wir jeder Zahl die gleichen Chancen geben; beim werfen einer Münze wird dem Auftreten von Kopf & Zahl gleiche Chancen einräumen. Beim Loto hat jede der 49 Kugeln die gleiche Chance, gezogen zu werden.

- Bei diesem Bsp. werden die möglichen Ausgänge als gleichberechtigt angesehen.
- Laplace (franz. Math) nutze diese Idee um Regeln für W'keiten für bestimmte Zufallsexp. aufzustellen.

• Wahrscheinlichkeitsansatz von Laplace

Laplace-Zufallsexp: Zufallsexp mit endlicher Zustandsraum, wo alle Ausgänge gleichberechtigt (oder gleichwahrscheinlich).

Dann, für ein Ereignis A:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl Elem. von } A}{\text{Anzahl Elem. im Zustandsraum}} = \frac{\text{"günstige Ausgänge"}}{\text{"mögliche Ausgänge"}}}$$

Beispiele Laplace W'keiten

Bemerkung: Ω

$A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_k\}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{k}{|\Omega|}$$

$\boxed{1}$ Zufallsexp: Würfel mit Farben (3 x gelb, 1 x rot, 2 x blau) gewürfelt; wir notieren die obenliegende Farbe.

$$\{\underset{\text{gelb}}{G}, \underset{\text{rot}}{R}, \underset{\text{blau}}{B}\}$$

A = "blau oder grün"

B = "rot"

$\mathbb{P}(A) = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} = \underbrace{\mathbb{P}(\{B\})}_{\frac{3}{6}} + \underbrace{\mathbb{P}(\{G\})}_{\frac{2}{6}}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$

$\boxed{2}$ Welches Spiel ist besser? (höhere W'keit)

A) Mit einem Münzwurf $1 \times K$?

B) Mit 3 Münzwürfe $2 \times$ Kopf?

A) $\Omega = \{K, Z\}$

$\mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{2}$

B) $\Omega = \{KKK, KZZ, ZZK, ZKZ, \underline{ZKK}, \underline{KKZ}, \underline{KZK}, ZZZ\}$

$|\Omega| = 2^3$

$\mathbb{P}(2 \text{ mal Kopf}) = \frac{3}{8} < \frac{1}{2} \Rightarrow$ Spiel A besser!

$\boxed{3}$ Lottospiel mit 15 Zahlen. 1 Zahl wird gezogen:

$\Omega = \{1, 2, \dots, 15\}$

A = "gerade Zahl"

B = "durch 3 teilbar"

C = "nicht durch 5 teilbar"

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = ?$

(Siebformel).

$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{15}$; $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{3, 6, 9, 12, 15\}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\text{"durch 5 teilbar"}) = 1 - \mathbb{P}(\{5, 10, 15\}) = 1 - \frac{3}{15} = \frac{12}{15}$

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\frac{7}{15}} + \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{\mathbb{P}(C)}_{\frac{12}{15}} - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\frac{2}{15}} - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap C)}_{\frac{6}{15}} - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

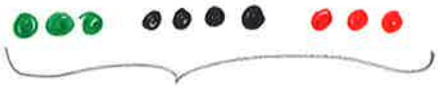
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6, 12\}) = \frac{2}{15}$; $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6, 8, 12, 14\}) = \frac{6}{15}$

$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{3,6,9,12\}) = \frac{4}{15}$

$P(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{6,12\}) = \frac{2}{15}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \frac{14}{15}$

$\boxed{4}$ Urne mit 3 grüne + 4 Schwarze + 3 Rote Kugeln,
Ziehe 1 Kugel.



A = "Kugel ist grün"
B = "Kugel ist schwarz"

$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$; $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{10}$

- Wenn ich 3 Kugeln ziehe, was ist
$\mathbb{P}(\{1 \text{ grüne } \& \text{ } 2 \text{ schwarzen}\}) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{0}}{\binom{10}{3}}$

KAPITEL III : ELEMENTARE KOMBINATORIK

• Die Kombinatorik beschäftig sich mit dem "Abzählen endlicher Mengen". Dies ist wichtig für die Bestimmung von Laplace-W'keiten!

Beispiele:

a) In wieviele Arten kann man die 7 Spieler einer Handballmannschaft in einer Reihe aufstellen?

b) Wieviele Möglichkeiten gibt es um 14 Spieler in 2 Handballmannschaften einzuteilen?

c) W'keit für sechs Richige im Loto? $\sim \frac{1}{14}$ Mio $= \frac{1}{\binom{49}{6}}$

• Diese Fragen werden hier beantwortet!

• lassen sich anhand des Urnenmodells einführen!

3.1 URNENMODELLE

★ Beschreibung: in einer Urne befinden sich n verschiedene Kugeln, die sich z.B in ihrer Farbe voneinander unterscheiden.

Häufig vorkommenden Fragestellungen in der WR:

1) Auf wieviele verschiedene Arten lassen sich die Kugeln anordnen!
(⇒ PERMUTATIONEN)

2) Aus der Urne werden nacheinander k Kugeln gezogen; 2 Fälle

a) Ziehung ohne Zurücklegen

→ die gezogene Kugel wird nicht in die Urne zurückgelegt

→ jede der n Kugeln kann nur einmal gezogen werden.

(die blaue Kugel scheidet aus)

b) Ziehung mit Zurücklegen

→ jede Kugel darf mehrmals verwendet werden

→ jede gezogene Kugel wird vor der nächsten Ziehung zurückgelegt (Könnte bei der nächsten Ziehung wieder gezogen werden)

3.2 PERMUTATIONEN

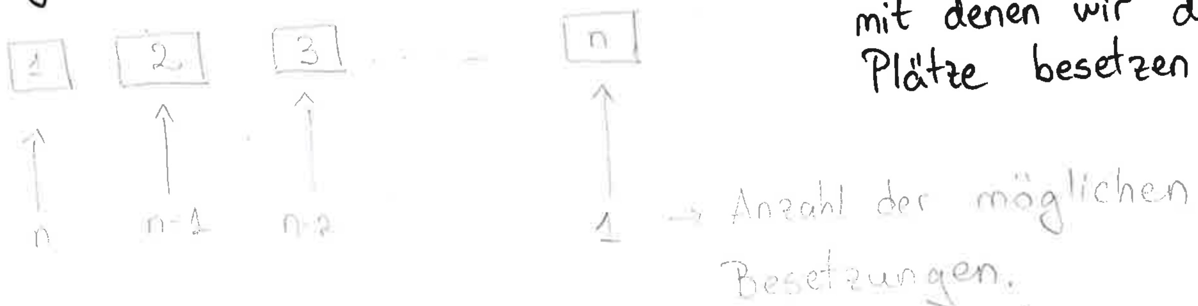
Problem: in eine Urne n verschiedenfarbige Kugeln. Auf wieviel verschiedene Arten kann man die Kugeln anordnen?

- **Bsp**: 3 Kugeln (weiss, grau, grün) kann man in 6 verschiedene Arten anordnen!

Def: Eine Anordnung von n verschiedenen Elemente (z.B. Kugeln) in einer bestimmten Reihenfolge heißt Permutation.

Frage 1 Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, n Elemente (verschiedene) anzuordnen?

Lösung: sind n Plätze vorhanden, von 1 bis n nummeriert, und n verschiedene Kugel, mit denen wir diese Plätze besetzen wollen.



- Platz 1 können wir mit jener der n Kugeln besetzen. Ist diese Stelle besetzt ⇒ für Besetzung 2. Platzen bleiben nur $(n-1)$ Möglichkeiten. Jene der $(n-1)$ übrig gebliebenen Kugel kann diesen Platz nehmen. ⇒ $n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

$\Rightarrow P(n) = n!$ (# Permutationen von n Kugeln)

<u>Frage 2</u>: # Permutationen (n), wenn unter den n Kugeln n_1 gleiche Kugeln (z.B n_1 schwarze Kugeln) $\Rightarrow$ die Vertauschungen der gleichen Kugeln fallen zusammen

5 Kugeln (1 graue, 3 weißen, 1 grüne)

$P(5;3) = \frac{5!}{3!}$

<u>Zusammenfassung</u>

Eine Anordnung von n Elementen heißt eine Permutation der n Elem
1) Wenn alle n Elementen verschieden sind $\Rightarrow$ # - Permutationen $P(n)$ ist $\boxed{P(n) = n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.}$
2) Unter der n Elementen befinden sich jeweils n_1 (z.B weisse), n_2 (graue), n_3 (grünen) ... , n_k gleiche. mit $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Es gibt dann

$$\boxed{P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}} = \binom{n}{n_1\, n_2 \ldots n_k}$$ für die n Kugeln.

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten

Bp 1) Urne mit 6 Kugeln = {3 weiße, 2 graue, 1 schwarze}
wieviele Anordnungsmöglichkeiten?

$$P(6;3,2,1) = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{2\cdot \cancel{4}\cdot 5\cdot 6}{\cancel{2}} = 60$$

Bsp 2) Fußbal 8 Mannschaften. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der 3 Erstplazierten?

$n = 8$, $n_1 = 5$ (Mannschaften auf Platz 4 bis 8)

$n_2 = n_3 = n_4 = 1$

$$P(8;5,1,1,1) = \frac{8!}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8$$

3.3. KOMBINATIONEN

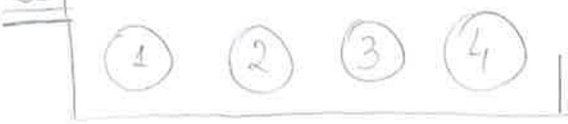
A KOMBINATIONEN OHNE WIEDERHOLUNG

Einer Urne mit n verschiedenen Kugeln entnehmen wir nacheinander k Kugeln (ohne Zurücklegen); Reihenfolge der gezogenen Kugeln ohne Bedeutung.

Def: Die gezogenen k Kugeln (Elemente) bilden eine **Kombination k-ter Ordnung**. $= C(n;k)$ $\quad k \leq n$

Frage? Wieviele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen? (jede Kugel darf nur einmal verwendet werden).

Bsp



(1)(2) (2)(3)
(1)(3) (2)(4)
(1)(4) (3)(4)

$C(4;2) = \binom{4}{2} = 6$

Reihenfolge unberücksichtigt, d.h. (1),(2) = (2)(1)

Allgemein: n Elemente (verschieden); k rausnehmen $\Rightarrow$ es handelt sich um Permutation von n Zahlen (Elem), die sich in 2 Klassen aufteilen lassen: $n_1 = k$ (die gezogenen Kugeln) und $n_2 = n-k$ (die übrig gebliebenen)

$1 \quad 2 \quad \ldots \quad k \;|\; k+1 \quad k+2 \quad \ldots \quad n$

$$C(n;k) = P(n;k,n-k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

! Es gibt $C(n;k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ verschiedene Möglichkeiten aus einer Urne mit n versch. Kugeln k herauszunehmen.