Bsp 1 Loto 6 aus 49 es gibt $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!}$ Möglichkeiten 6 Zahlen aus 49 zu wählen.

$\mathbb{P}(\text{gewinnen}) = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

$\mathbb{P}(\underbrace{3 \text{ richtige Zahlen}}) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}$

49 Karten in 2 Gruppen $\{6 \;,\; 43\}$
gewählten nicht gewählten

$$\boxed{\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}}$$

3.4 VARIATIONEN

A) OHNE WIEDERHOLUNG

Problem: n Kugeln (verschiedenen), k rausnehmen und Reihenfolge berücksichtigen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

$V(n;k) = ?$

Bsp: ① ② ③ Ziehe 2 Karten ohne Zurücklegen

Möglichkeiten

①,② ③ ①
② ① ② ③
① ③ ③ ②

6

$V(n;k) = k!\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Def: (Variation k-ter Ordnung ohne Wiederholung)

$$V(n;k) = k!\,C(n;k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Wenn $k = n \Rightarrow \boxed{V(n;n) = P(n)}$

Bsp: Ziffern 1 bis 9 sollen 3stellige (unterschiedliche) Zahlen gebildet werden.
Möglichkeiten: $9!/(9-3)! = 504$

B) MIT WIEDERHOLUNG

Urnen Modell : n Kugeln (verschiedenen), k rausnehmen und jede gezogene Kugel muss vor der nexte Ziehung zurück in die Urne gelegt werden.

$$V_w(n; k) = n^k$$

Bsp: Wieviele Möglichkeiten gibt es $k = 12$ Geburtstage zu ziehen, aus $n = 365$?

$$V_w(365, 12) = 365^{12}$$

? = P[2 Personen in eine Gruppe 25 Pers unterschiedliche Geburtsdatum]

3.5 HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG

Urnenmodell: Urne mit N numerierte Kugeln : M rot, N − M blau ; Es werden auf einmal n Kugeln gezogen. (ohne zurücklegen & Reihenfolge nicht berücksichtigt).

Frage : P[daß aus n Kugeln genau k rote sind] = ?

$$\#\text{ alle Möglichkeiten} = \binom{N}{n} = C(N, n)$$

$$\#\text{ günstige Möglichkeiten} = \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$$

$$P[k \text{ rote Kugeln}] = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

"günstige" = {k rote aus insgesamt M roten Kugeln} × {n − k blaue aus insgesamt N − M blauen Kugeln}

Bsp: 100 Lose = 30 Gewinne, 70 Nieten
10 Lose werden gezogen

- $P[3 \text{ Gewinne}] = \dfrac{\binom{30}{3}\binom{70}{7}}{\binom{100}{10}}$

- $P[\text{mindestens } 2 \text{ Gewinne}] = 1 - P[\text{höchstens } 2 \text{ Gewinne}] =$
$= 1 - (P[\text{genau } 1 \text{ Gewinn}] + P[\text{genau } 2 \text{ Gewinne}])$
$= 1 - \dfrac{\binom{30}{1}\binom{70}{9}}{\binom{100}{10}} - \dfrac{\binom{30}{2}\binom{70}{8}}{\binom{100}{10}} = \ldots$

3.6 BINOMIALVERTEILUNG.

Urnenmodell: Urne mit N numerierte Kugeln, davon M rote Kugeln & $N-M$ blaue Kugeln. Es werden n Kugeln mit zurücklegen gezogen.

Frage: $P[\text{unter den } n \text{ Kugeln befinden sich } k \text{ rote}] = ?$

$$\overbrace{(1)\,(2)\,\ldots\,(M)}^{M \text{ rote}} \quad \overbrace{(M+1)\,\ldots\,(N)}^{(N-M) \text{ blaue}}$$

\# Möglichkeiten um n Kugeln mit zurücklegen ist N^n

\# günstige Möglichkeiten: $\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Pos für die } k \text{ rote Kugeln}} \cdot M^k (N-M)^{n-k}$

$M^k = \#\{k$ rote Kugeln aus M Kugeln Stück mit zurücklegen ziehen$\}$

$(N-M)^{n-k} = \#\{(n-k)$ schwarze Kugeln aus $(N-M)$ Stück mit Zurücklegen ziehen$\}$

$$\mathbb{P}[k \text{ rote ziehen}] = \frac{\binom{n}{k} M^k (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

Bemerkungen:

$\frac{M}{N}$ = Anteil der roten Kugeln in Urne

= Erfolgswahrscheinlichkeit bei einem einzelnen „Ziehen"

$= p$

$1-\frac{M}{N}$ = Anteil der blauen Kugeln

$= 1-p$ = „Mißerfolgsw'keit einmaligem Ziehen"

Bsp:

(1) Roullete (37 Zahlen: 0 .. 37; 0 - Grün, 1/2 Rot, 1/2 Schwarz)

$n = 10$ mal spielen; immer aufs Rot setzen

X = Anzahl der Gewinne

$\mathbb{P}[X=4] = ?$

$$\mathbb{P}[X=4] = \binom{10}{4}\left(\frac{18}{37}\right)^4 \left(1-\frac{18}{37}\right)^{10-4} = 0{,}706$$

$\mathbb{P}$[mindestens 3 mal zu gewinnen] = ?

$$\mathbb{P}[X\geq 3] = 1-\mathbb{P}[(X\geq 3)^c] = 1-\mathbb{P}[X\leq 2] = 1-\mathbb{P}[X=0]-\mathbb{P}[X=1]-\mathbb{P}[X=2] = 1-\binom{10}{0}\left(\frac{18}{37}\right)^0\left(1-\frac{18}{37}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{18}{37}\right)^1\left(1-\frac{18}{37}\right)^{9} - \binom{10}{2}\left(\frac{18}{37}\right)^2\left(1-\frac{18}{37}\right)^{8} = \underline{\underline{0.9351}}$$

Modell : n Kugeln ; K Kugeln werden nacheinander gezogen

	Ziehung ohne Zurücklegen	Ziehung mit Zurücklegen
Reihenfolge nicht berücksichtigt	Kombination k-ter Ordnung $C(n;k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	Kombination k-ter Ordnung mit Zurücklegen $C_z(n;k) = \binom{n+k-1}{k}$ → Nicht eingeführt
Reihenfolge berücksichtigt	Variation k-ter Ordnung $V(n;k) = \frac{n!}{(n-k)!} = k!\, C(n;k)$	$V_z(n;k) = n^k$

Permutationen

1) $P(n) = n!$

2) $P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$

Bsp: n unterscheidbare Bälle werden in N Urnen gelegt. Berechnen $\mathbb{P}$[eine bestimmte Urne enthält genau k Bälle] $= P_k$, mit $k \le n$.

#(aller Möglichkeiten) $= V_w(N, n) = N^n$

#(günstige Fälle) = #(aus n Bällen k auswählen) × #(($n-k$) Bälle auf ($N-1$) Urnen verteilen) =

$$\binom{n}{k} \cdot V_w(N-1, n-k) = \binom{n}{k} (N-1)^{n-k}$$

$$\Rightarrow P_k = \frac{\binom{n}{k} (N-1)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{N}\right)^k$$

Bsp In eine Lieferung von 100 Bauteilen, unter denen sich 5 defekte befinden, werden zufällig 4 Teile mit (ohne) Zurücklegen entnommen und geprüft.

$P_k = \mathbb{P}$[k defekte Teile gezogen werden], für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\mathbb{P}$(k defekte bei Ziehen mit Zurücklegen) $= \dfrac{\binom{5}{k}\binom{95}{4-k}}{\binom{100}{4}}$ → Hypergeometrisch

$\mathbb{P}$[k defekte bei Ziehen ohne Zurücklegen] =

$$\binom{4}{k} \left(\frac{5}{100}\right)^k \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{4-k}$$

→ Binomiale Verteilung

KAPITEL IV: BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN

4.1 MOTIVATION UND 1-2 BEISPIELE

- In vielen Situationen liegt schon Information vor, wenn man die W! eines Ereignisses bestimmen möchte.

Bsp → beim Kartenspielen kennt man die eigenen Karten
→ beim Abschluss einer Lebensversicherung kennt man das Alter des Antragstellers

D.h: man ist über das Eintreten eines Ereignisses B schon informiert, wenn man $P[A]$ bestimmen will.

Einführendes Beispiel: In einer Umfrage soll der Anteil der Raucher an der Bevölkerung ermittelt werden.

Gesucht $P[\underbrace{\text{eine zufällig gewählte Person Raucherin ist}}_{A}] = ?$

$P[A|B] = ?$

- Sei $B = \{$eine zufällig gewählte Person eine Frau zwischen 20 und 30 ist$\}$

$$P[A|B] = P[\text{Raucherin} \mid \text{20-30 jährige Frau}] =$$

$$= \frac{|\{\text{20-30 jährigen Raucherinnen}\}|}{|\{\text{20-30 jährigen Frauen}\}|} =$$

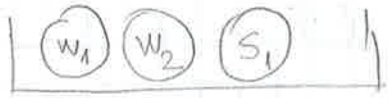
$$= \frac{\frac{|\{\text{20-30 jährigen Raucherinnen}\}|}{|\{\text{Gesamtbevölkerung}\}|}}{\frac{|\{\text{20-30 jährigen Frauen}\}|}{|\{\text{Gesamtbevölkerung}\}|}} = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Def: Seien A und B Ereignisse und $\mathbb{P}[B] > 0$. Dann ist

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Zweistufiges Zufallsexperiment

Bsp: Man betrachte 2 Urnen: in Urne 1 befinden sich 2 weiße und eine schwarze Kugel, Urne $2 = \{1W, 2S\}$



$U1$

U_2

Man führe nun folgendes Zweistufiges Zufallsexperiment aus:

1) Man mache einen Münzwurf mit einer fairen Münze.
2) (a) Falls beim Münzwurf "Kopf" resultierte, so ziehe man eine Kugel aus Urne I
   (b) Falls beim Münzwurf "Zahl" resultierte, so ziehe man eine Kugel aus Urne II.

→ Betrachte die Farbe der gezogenen Kugel.

Zustandsraum

$$\Omega = \{(U_1, w_1), (U_1, w_2), (U_1, s_1), (U_2, w_1), (U_2, s_1), (U_2, s_2)\}$$

wo (U_1, w_1) heisst dass aus Urne 1 eine weiße Kugel gezogen wurde

- Jeder (von die 6) Ausgang ist gleich wahrscheinlich ⇒

$$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{6}, \forall w \in \Omega$$

$\Rightarrow$ • $P[\overbrace{\text{"Zahl"}}^{B} \text{ und } \overbrace{\text{"schwarze Kugel wird gezogen"}}^{A}] =$

$P[\{(U_2, s_1), (U_2, s_2)\}] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

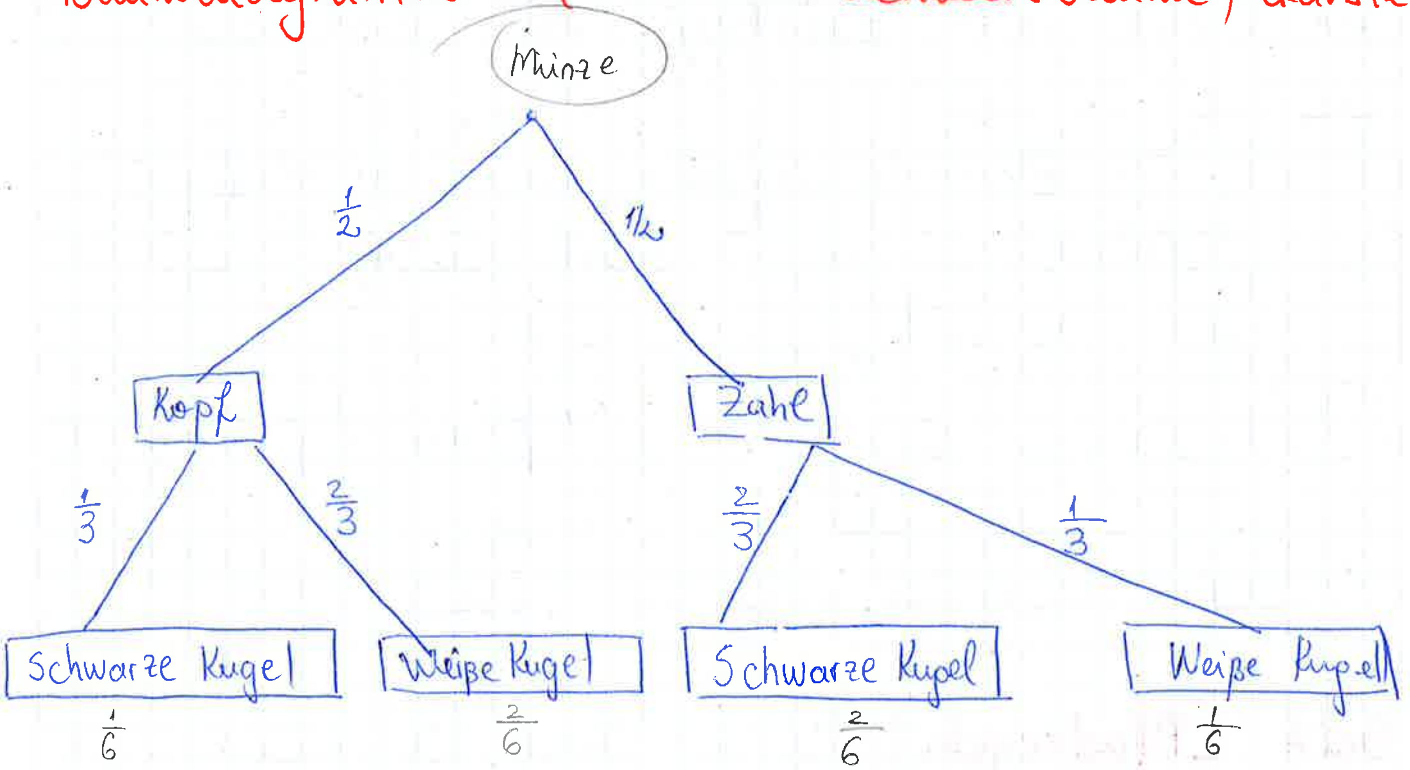
$P[\text{"schwarze Kugel wird gezogen"}] =$

• $P[\{(U_1, s_1), (U_2, s_1), (U_2, s_2)\}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\frac{P[\text{"Zahl" und "schwarze Kugel"}]}{P[\underbrace{\text{"Zahl"}}_{B}]} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}}$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit daß man eine schwarze Kugel zieht, wenn man weiß, dass man aus Urne 2 eine Kugel zieht. $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$

Bemerkung: Wir Können das Exp durch ein Baumdiagramm (Wahrscheinlichkeitsbaum) darstellen.



$\frac{1}{6} = P[\text{"Schwarze K"} \cap \text{Kopf}]$

$\frac{2}{6} = P[\text{"Weiße Kugel"} \cap \text{Kopf}]$

$\frac{2}{6} = P[\text{"schwarze Kugel} \cap \text{Zahl}]$

W!keitsbäume

Bemerkungen: W! Baum besteht aus Knoten und Kanten (die je 2 Knoten verbinden). Jeder W'Baum beginnt mit dem AnfangsKnoten (der Wurzel. Von der Wurzel gehen Kanten zu Knoten, die disjunkten Ereignissen auf der erste Stufe (1. Zufallsexperiment) entsprechen; von diesen Knoten gehen Kanten zu Knoten aus, die disjunkten Ereignisse auf der zweiten Stufe entsprechen . usw.

- EndKnoten heißen Blätter
- Wege von Wurzel zu einem Blatt stellen Elementarereignisse des mehrstufigen Zufallsexp. dar (Pfade)

Def:

(a) **Mehrstufiges Zufallsexp** = Hintereinanderausführung von endlich vielen Zufallsexp. mit Zustandsräume

$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$

→ Ein Elementarereigniss eines n-stufiges Zufallsexp ist ein n-Tupel $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ mit $\omega_i \in \Omega_i$; $i = 1, \dots, n$

- Zustandsraum für ein n-stufigen Zufallsexp ist

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$$

und $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdot \dots \cdot |\Omega_n|$.

Satz [Pfadregeln] Für ein durch ein W'baum beschriebenes Zufallsexp, gilt:

a) **Pfadmultiplikationsregel**: W!keit für ein Pfad = Produkt der W!keiten entlang dieses Pfades

b) Pfadadditionsregel: Die W!keit für ein Ereignis ist = der Summe der W!keiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

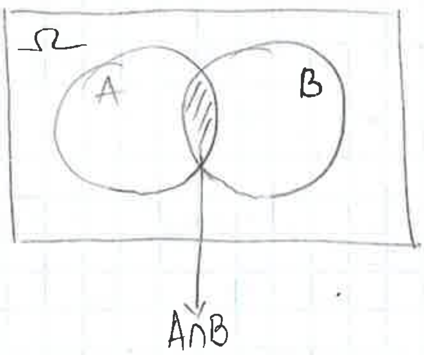
Bemerkung: diese Regeln ermöglichen im konkreten Fall oft eine rasche und einfache Berechnung von W!keiten, ohne ein Zustandsraum und Elementarereignisse explizit als Mengen darstellen und ohne kombinatorische Berechnungen aufstellen zu müssen.

4.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Def [Schon auf Seite 22 (oben) definiert]
Bedingte W'keit von A under Ereignis B ist

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Geometrische Interpretation



- $\mathbb{P}[A|B]$ = der relative Anteil von $A \cap B$ in B.

Bsp (auf Seite 22 mit 2 Urnen)

$$\mathbb{P}[\text{"schwarze Kugel"} \mid \text{"Kopf"}] = \frac{\mathbb{P}[\text{"schwarze Kugel"} \cap \text{Kopf}]}{\mathbb{P}[\text{Kopf}]}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$