Bsp: Wir würfeln gleichzeitig mit 2 Würfeln. Seien
B = Augensumme ist 8
A = Die Augenzahlen beider Würfel sind gerade.
$\mathbb{P}[A|B] = ?$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$\mathbb{P}[A\cap B] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \rightarrow \{(6,2),(2,6),(4,4)\} = A$$

$$B = \{(6,2),(2,6),(4,4),(3,5)(5,3)\}$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{5}{36} \Rightarrow \mathbb{P}[A|B] = \frac{5}{36}$$

Bsp: (W'baum) Die Studenten haben zu Mathe A Klausur 3 schriftliche Versuche. Aufgrund langjähriger Erfahrung (rein fiktiv) weiß man, daß 65% der Studenten beim ersten Versuch positiv sind. Die Studenten, die zum zweiten Versuch antreten sind mit 55% erfolgreich. Beim dritten Versuch sind 80% erfolgreich.

a) Modellieren Sie diese Situation in einem W'baum.

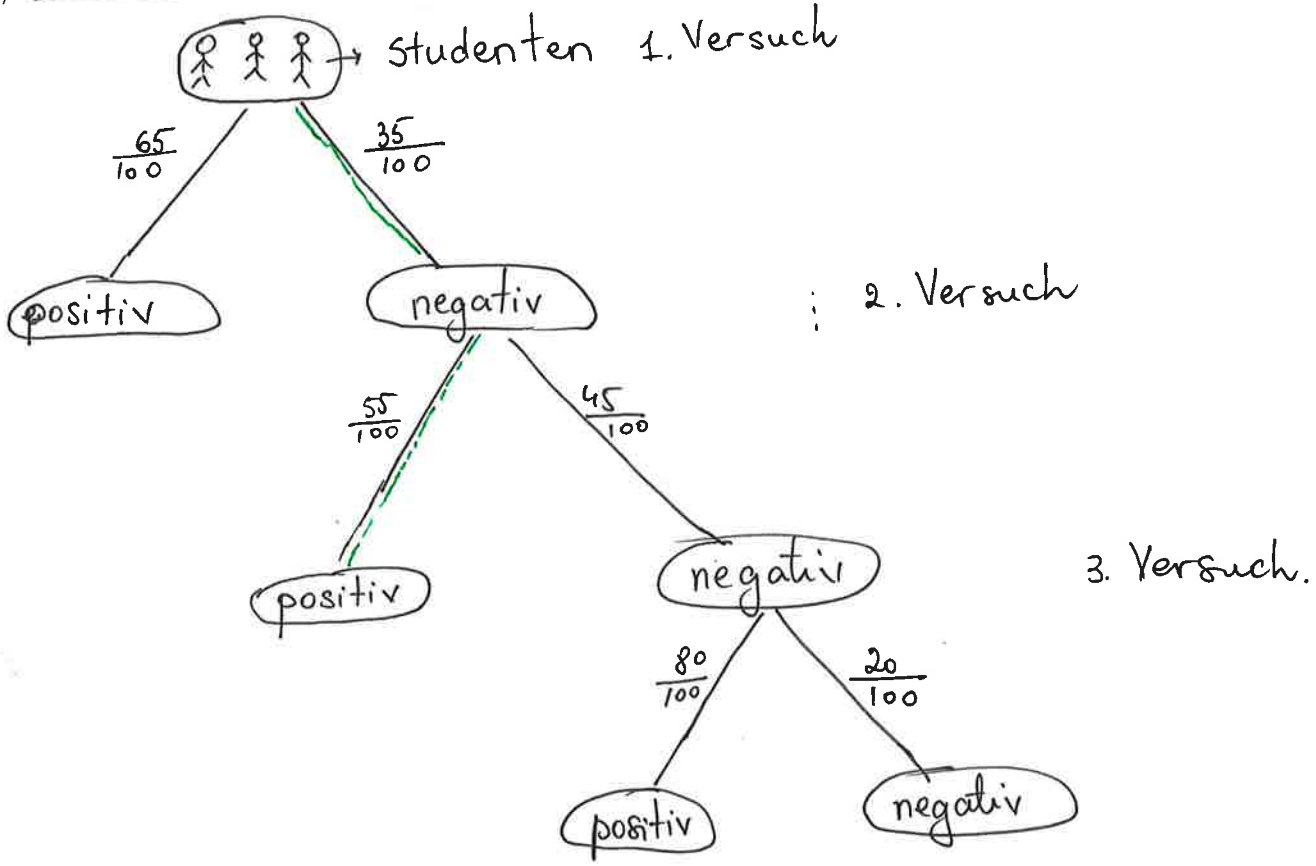
b) $\mathbb{P}$[zufällig ausgewählter Student die Mathe A Prüfung beim 2. Versuch besteht] = ?

c) B = {Ein zufällig ausgewählter Student hat MATHE A bestanden.}

? = $\mathbb{P}$[1. Versuch + | B]

d) Sei B = {1. Versuch → nicht bestanden}
$\mathbb{P}$[weiteren schriftlichen Versuche positiv sein wird | B] = ?

a) W! baum:



b) $P[\text{2. Versuch} + \mid \text{1. Versuch} -] = \frac{55}{100}$

c) $P[\text{1. Versuch positiv} \mid \text{bestanden}] = \frac{P[\text{1. Versuch+} \cap \text{bestanden}]}{P[\text{bestanden}]} =$

$$= \frac{\frac{65}{100}}{\frac{65}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{55}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{45}{100} \cdot \frac{80}{100}} = \frac{65\%}{65\% + 19{,}25\% + 12{,}60\%} = 67\%$$

d) $P[\text{Versuch 2. oder 3. positiv} \mid \text{1. Versuch negativ}] =$

$P[\text{Versuch 2 positiv} \mid \text{1. Versuch negativ}] +$

$P[\text{Versuch 3 positiv} \cap 2 \cap \text{2. Negativ} \mid \text{1. Versuch negativ}] =$

$$= \frac{55}{100} + \frac{80}{100} \cdot \frac{45}{100} = 91\%$$

d) → braucht man Multiplikationsregel

Satz: Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein W!Raum, und B ein Ereignis mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann ist $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ auch ain W'Raum; wo $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$, für alle Ereignisse A.

Beweis: (1) $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} > 0$

(2) $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega|B) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$

(2) (Additivität)

A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \phi$

$\mathbb{P}_B[A_1 \cup A_2]$

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 | B] = \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cup A_2)\cap B]}{\mathbb{P}(B)} \overset{\text{distributivität}}{=} \frac{\mathbb{P}[(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)]}{\mathbb{P}(B)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}[A_1\cap B]}{\mathbb{P}[B]} + \frac{\mathbb{P}[A_2\cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \mathbb{P}[A_1|B] + \mathbb{P}[A_2|B] \quad \square$$

4.3 Multiplikationsregel

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[B]} \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}[A\cap B] = \mathbb{P}[B]\cdot \mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]\cdot\mathbb{P}[B|A]}$$

lässt sich verallgemeinern.

Für 3 Ereignissen A, B, C

$$\boxed{\mathbb{P}[A\cap B\cap C] = \mathbb{P}[A]\cdot\mathbb{P}[B|A]\cdot\mathbb{P}[C|A\cap B]}$$

Multiplikationssatz: Sei $A_1, A_2, \dots, A_n \to$ Ereignisse mit $\mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i > 0]$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbb{P}[A_1\cap A_2 \dots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1]\cdot\mathbb{P}[A_2|A_1]\cdot\mathbb{P}[A_3|A_2\cap A_1]\cdot\mathbb{P}[A_4|A_1\cap A_2\cap A_3] \dots \mathbb{P}[A_n|A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_{n-1}]}$$

$\boxed{\text{Bsp}}$: Urne = { 4 weiße und 2 schwarze Kugel } ; 2 Kugeln werden (ohne Zurücklegen) gezogen. $\mathbb{P}$[beide Kugel sind weiß] = ?

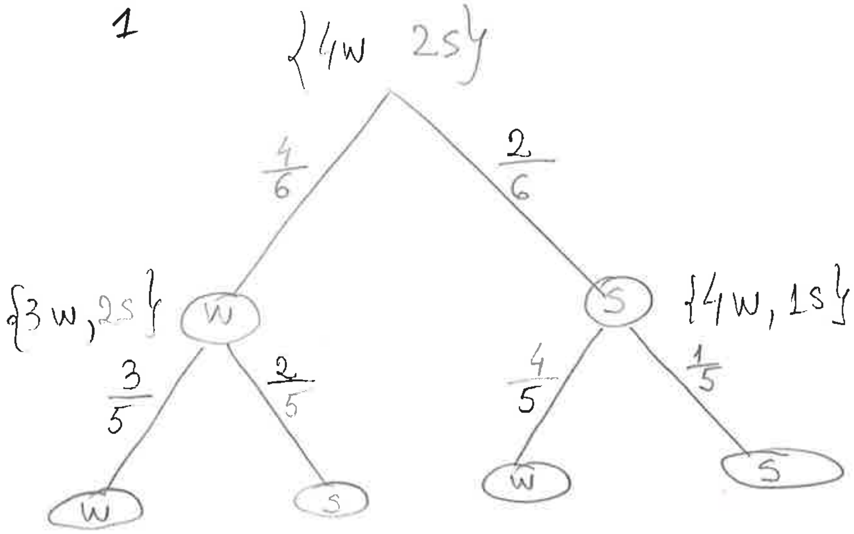
Lösung 1: Sei A = 1. gezogene Kugel ist weiß
B = 2. gezogene Kugel ist weiß.

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B|A] = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}_{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{2}{5}$$

Lösung 2: Hypergeometrische Verteilung

$$\mathbb{P}[2 \text{ weiße Kugeln}] = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{\frac{\cancel{4!}}{\cancel{2!}\cdot 2!}}{\frac{\cancel{6!}\,5\cdot 6}{\cancel{2!}\cdot 4!}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4!}{5\cdot 6} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Lösung 3: W! Baum: 2-stufiges Experiment.
‖
1



$$\mathbb{P}[1.\text{weiß} \cap 2.\text{weiß}] = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}[1.\text{schwarz} \cap 2.\text{weiß}] = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\mathbb{P}[2.\text{weiß} \,|\, 1.\text{schwarz}] = \frac{4}{5}$$

4.4. Stochastisch unabhängige Ereignisse

Die W! eines Ereignisses A, vom eintreten eines weiteren Ereignisses B ahhängen kann. ⇒ das führte zu bediengte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A|B]$. In vielen Fällen, ist die W! für das Eintreten von A völlig unabhängig davon, ob B eingetreten ist oder nicht, und umgekehrt. In diesem Fall:

$$\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A] \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[A].$$

Aus dem Multiplikationsatz ⇒ $\mathbb{P}[A \cap B] = \underbrace{\mathbb{P}[A|B]}_{\mathbb{P}[A]} \cdot \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$

Def: Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig wenn $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$.

Bemerkungen:
1) Wenn A und B unabhängig, dann auch B und A unabhängig.
2) Falls $A \cap B = \phi$ und $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$, dann sind A und B nicht unabhängig!

Bsp: Roulette. Seien

$A =$ "gerade Augenzahl > 0" ; $\mathbb{P}(A) = \frac{18}{37}$

$B =$ "Zahlen $1 \dots 18$" $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{18}{37}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{37} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow$ A und B nicht unabhängig!

Satz: Falls A und B unabhängig, dann
(i) A und $\overline{B}$ unabhängig.
(ii) $\overline{A}$ und B unabhängig
(iii) $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig.

Def: [Stochastiche Unabhängigkeit von $A_1, A_2 \dots, A_n \subseteq \Omega$]
$A_1, A_2, \dots, A_n$ heißen vollständig stochastisch unabhängig, wenn für alle $m \in \{2, 3, \dots, m\}$ und $1 \leq i_1 < i_2 < \dots \dots i_m \leq n$ gilt:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_m}).$$

Z. Beispiel: A_1, A_2, A_3 sind vollständig unabhängig, wenn:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$
$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3).$$

$\boxed{\text{Achtung}}$: Es ist möglich daß $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j)$ für alle $i \neq j$, aber

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \neq \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_3}).$$

d.h (A_i) sind paarweise unabhängig, aber nicht vollständig unabhängig.

Bsp: Urne mit 4 Kugeln, nummeriert mit $\{1, 2, 3, 123\}$.
1 Kugel wird gezogen.
Sei A_i = "die gezogene Kugel trägt Ziffer i." $i = 1, 2, 3$
Sind A_1, A_2, A_3 unabhängig?

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2} \;;\; \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2} \;;\; \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2};\; \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_2)}_{\frac{1}{2}} = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}_{\frac{1}{4}} \neq \underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_3)}_{\frac{1}{2}} = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \underbrace{\mathbb{P}(A_2 \cap A_3)}_{\frac{1}{4}}$$

Aber $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

$\Rightarrow$ A_1, A_2, A_3 nicht vollständig unabhängig.

Bemerkung: der Nachweis stochastischen Unabhängigkeit von $A_1, A_2, \dots, A_n$ ist in der Praxis oft sehr mühsam. In vielen Fällen jedoch lässt sich die Unabhängigkeit logisch begründen.

4.5 TOTALE WAHRSCHEINLICHKEIT UND DIE FORMEL VON BAYES.

Satz (Totale W!)

Seien $H_1, H_2, \dots H_n$ paarweise disjunkte Ereignisse, die eine vollständige Zerlegung von Ω bilden: d.h $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.