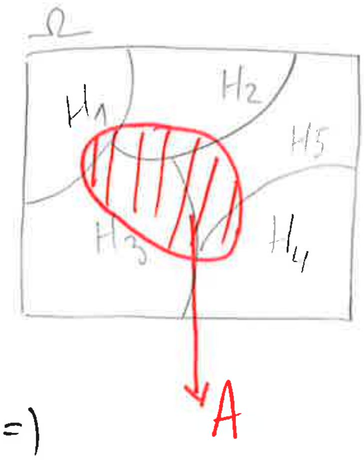
Für $A \subseteq \Omega$, es gilt

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}[A \mid H_i]}$$



Beweis: $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)$ und

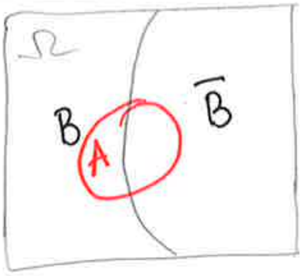
$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = \emptyset \quad , \forall\, i \neq j \Rightarrow$

$$\underbrace{\mathbb{P}\Big[\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\Big]}_{\mathbb{P}[A]} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \cap H_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[H_i] \cdot \mathbb{P}[A \mid H_i]$$

$$\mathbb{P}[A \mid H_i] = \frac{\mathbb{P}[A \cap H_i]}{\mathbb{P}[H_i]}$$

$\sqcap$

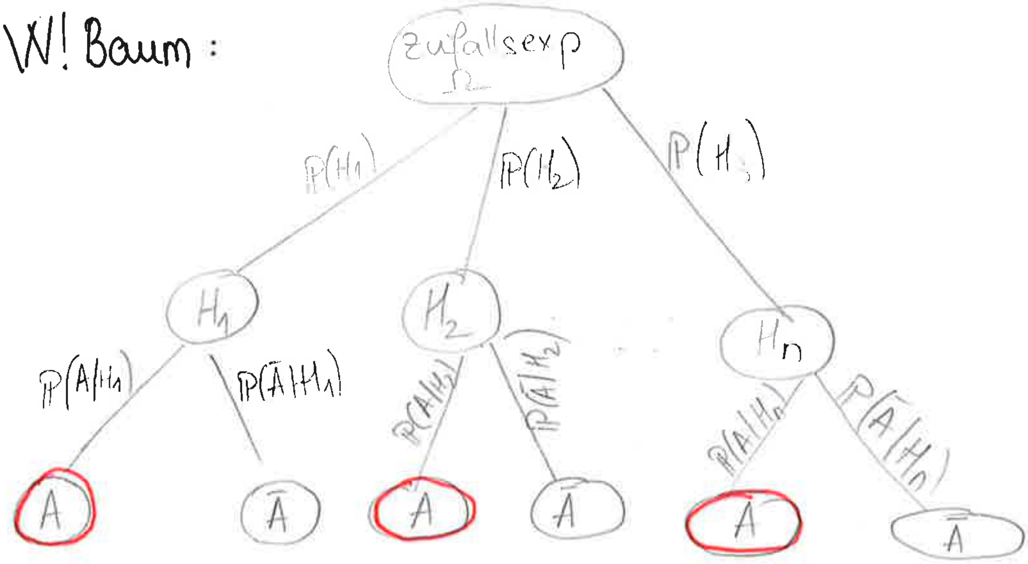
Spezial Fall (i)



$\Omega = B \cup \bar{B} \quad , B \subseteq \Omega$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(\bar{B})\, \mathbb{P}(A \mid \bar{B})$

(ii) W! Baum:



$\mathbb{P}(A) \underset{\text{Totale W!}}{=\!=}$ Produkte der W! in jedem Pfad, aufsummiert über alle Pfade, die zu A führen.

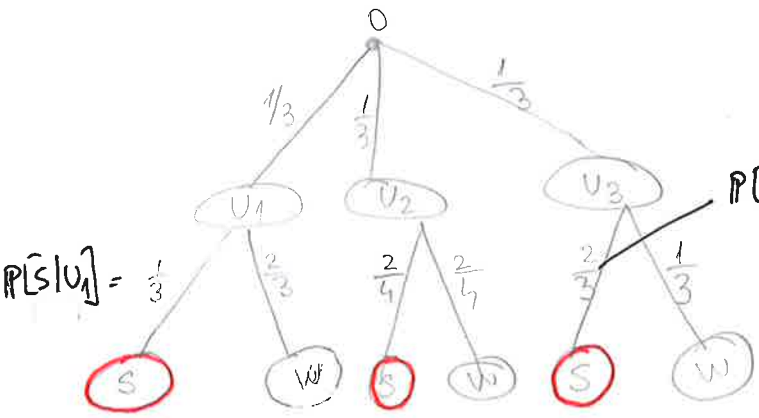
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_1) + \mathbb{P}(H_2) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_2) + \dots \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_n)$$

Bsp: 3 Urnen $U_1 = \{2w + 1s\}$, $U_2 = \{2w + 2s\}$, $U_3 = \{1w + 2s\}$

→ Zuerst wird eine Urne zufällig gewählt (U_1, U_2 oder U_2) und dann ziehen wir eine Kugel aus dem Urne.

$\mathbb{P}$[schwarze Kugel gezogen] = ?

$\mathbb{P}$[die gezogene schwarze Kugel aus der Urne U_1 stammt]



$$\mathbb{P}[S] = \mathbb{P}[U_1]\cdot\mathbb{P}[S|U_1] + \mathbb{P}[U_2]\cdot\mathbb{P}[S|U_2] + \mathbb{P}[U_3]\cdot\mathbb{P}[S|U_3]$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}[U_1 \text{ stammt} \mid \text{schwarz gezogen}] = \frac{\mathbb{P}[U_1 \cap \text{schwarz}]}{\mathbb{P}[\text{schwarz}]} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$$

□

Frage: Totale W! rechnet $\mathbb{P}[A]$.
Umgekehrt: wir wissen dass Ereignis A eingetreten ist. Wie groß ist die W'keit, dass H_j die Ursache war? $\mathbb{P}[H_j | A] = ?$

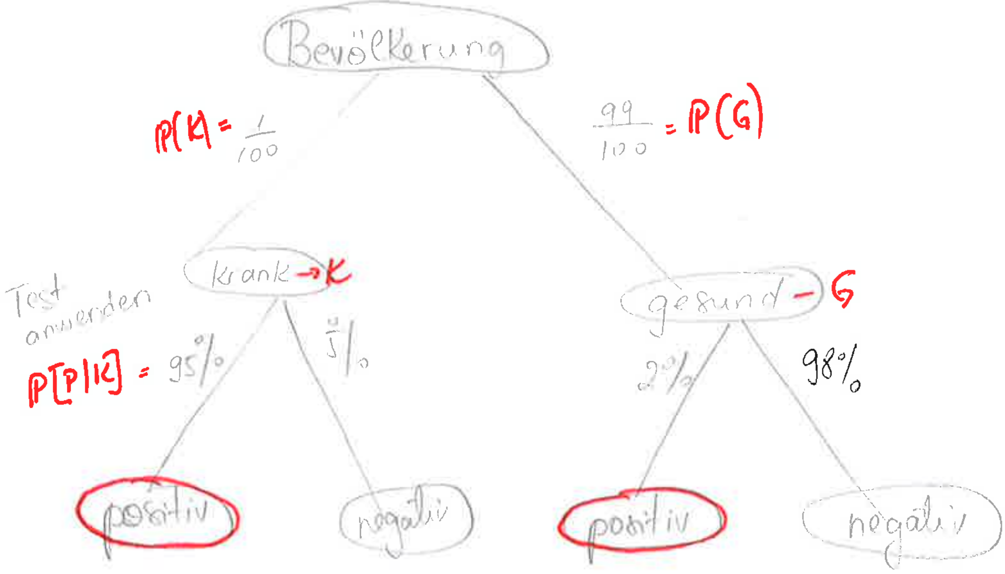
Bsp [Medikamentenschnelltest für eine bestimmte Krankheit].

Aufgrund langjähriger Statistiken weiß man, dass 1% der Bevölkerung an diese Krankheit erkrankt ist. Studienergebnissen: Medikamententest bei einem Erkrankten mit 95% eine Erkrankung signalisiert.
Bei einem gesundem Menschen signalisiert der Test irrtürmlich eine Erkrankung mit W'Keit 2%.

a) Eine zufällige Testperson wird aus der Bevölkerung ausgewählt.
$\mathbb{P}$[Schelltest Signalisiert eine Erkrankung] = ?

b) $\mathbb{P}$[eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn der Test einen positiven Befund lieferte] = ?

c) $\mathbb{P}$[eine Person irrtümlich als gesund betrachtet wird, wenn der Schnelltest keine Erkrankung signalisierte]



a) $\mathbb{P}[\underbrace{\text{Erkrankung signalisiert}}_{P = \text{Test positiv}}] = \mathbb{P}[P] = \mathbb{P}[\text{Krank}] \cdot \mathbb{P}[\text{positiv} \mid \text{Krank}]$

$+ \mathbb{P}[\text{gesund}] \cdot \mathbb{P}[\text{positiv} \mid \text{gesund}] = \frac{1}{100} \cdot \frac{95}{100} + \frac{99}{100} \cdot \frac{2}{100} = 0{,}0293$

$= 2{,}9\%$

b) $$\mathbb{P}[\text{Krank} \mid \text{positiv}] = \frac{\mathbb{P}[\text{Krank} \cap \text{positiv}]}{\underbrace{\mathbb{P}[\text{positiv}]}_{= \text{a)}}} = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{95}{100}}{2{,}9\%} = 0{,}32$$

$= 32\%$

c) $$\mathbb{P}[\underbrace{\text{Krank}}_{H_2} \mid \text{negativ}] = \frac{\mathbb{P}[\text{Krank} \cap \text{negativ}]}{\mathbb{P}[\text{negativ}]} =$$

Bayes

$$= \frac{\frac{1}{100} \cdot 98\%}{1 - 0{,}0293} = \underline{0{,}000515}$$ = mit diese W!keit ist der Test schlecht!

Formel von Bayes:

Seien $H_1, H_2, \dots, H_n$ Ereignisse $\subseteq \Omega$, die eine Zerlegung von Ω bilden, d.h. $H_i \cap H_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ und $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, mit $\mathbb{P}(H_i) > 0$. Dann gilt, $\forall A \subseteq \Omega$

$$\boxed{\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\,\mathbb{P}(A|H_i)}}$$

Beweis: $\mathbb{P}(A \cap H_j) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(H_j|A)$ $\Rightarrow$ und $\mathbb{P}(A \cap H_j) = \mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}(A|H_j)$

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}(A|H_j)}{\mathbb{P}(A)} \underset{\text{Totale W'keit!}}{=} \frac{\mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}$$

Bemerkungen:

(1). H_j fassen alle möglichen Ausgänge eines Zufallsexp. zusammen. $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(H_j)$ und $\mathbb{P}(A|H_j)$ können bestimmt werden.

(2) Der Satz von Bayes dient zur Ermittlung der umgekehrten bedingten W'keiten $\mathbb{P}(H_j|A)$ bei gegebenen $\mathbb{P}(A|H_j)$ und $\mathbb{P}(H_j)$.

KAPITEL V : ZUFALLSVARIABLEN (ZUFALLSGRÖßEN)

Zufallsexp : $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2 \dots \}$

$\omega_1, \omega_2 \dots \rightarrow$ Elementarereignisse

Def: Eine Abbildung (Funktion) $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Zufallsvariable (ZV)**

- jedem Elementarereigniss ω aus der Grundmenge (Zustandsraum) Ω eines Zufallsexp. wird genau eine reele Zahl $X(\omega) \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Anmerkungen:

- ZV werden mit großen lateinischen Buchstaben, ihre Werte mit kleinen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.

! ZV X

- diskret → wenn X nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele reele Werte annehmen kann
- stetig → nimmt Werte in ein Interval (kann jeden beliebigen Wert aus einen Interval annehmen)

Beispiele von ZV:

(1) Augensumme beim Wurf mit 2 Würfeln (unterscheidbar)

$$\Omega = \{ \underbrace{(\omega_1, \omega_2)}_{\omega} : \omega_1 = 1, 2 \dots, 6 ;\ \omega_2 = 1, 2, \dots, 6 \}$$

Sei X = Augensumme beider Würfel

$$X((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2 \in \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x\})$$

$$p_X(2) = \frac{1}{36} ; \quad p_X(3) = \frac{2}{36} ; \quad p_X(4) = \frac{3}{36}$$

(2) Urne mit N Kugeln, mit M rot und $N-M$
n Kugeln mit zurücklegen ziehen.

X = Anzahl der roten Kugeln (gezogenen)

$$\Omega = \{ \underbrace{(j_1, j_2, \dots, j_n)}_{\omega} \mid j_i \in \{1, 2, \dots, N\} \}$$

$$X \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Für $k \leq n$: $p_X(k) = \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$p = \frac{M}{N}$: Erfolgsw'keit.

(3) Füllanlage für Wein, die 0,75 ℓ Flaschen abfühlt, arbeiten nicht ganz exakt.

X = Füllmenge einer Flasche (in $m\ell$) X = stetig

- Der Wert der ZV. X gibt ein Volumen an, und kann daher jeder beliebige reele Zahl annehmen.

5.1 Verteilungsfunktion einer ZV.

- Das Verhalten der Z.V wird durch bestimmte Fkt. (Verteilungen) dargestellt.
- Gegensatz zu Fkt (deterministisch), nehmen die Zufallsvariablen bestimmten Werte mit eine bestimmte Wahrscheinlichkeit an

Für eine diskrete Z.V

$$p_X(x) = \mathbb{P}[X = x] = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} \mathbb{P}[\omega]$$

Def [Verteilungsfkt. einer ZV]

Sei X eine ZV. Die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X ist die W'keit dass X einen Wert $\leq$ einer vorgegebener Zahl x ist:

$$\boxed{F_X(x) = P[X \leq x]}$$

$$= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}]$$

- $[X \leq x]$ ist ein Ereignis $A = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$
- Eine ZV X wird durch ihre Verteilungsfkt. F_X vollständig beschrieben.

Eigenschaften von Verteilungsfkt

(1) F_X ist eine monoton wachsende Fkt:
Wenn $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

(2) $F_X \in [0,1]$ und $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 & \text{(unmögliches Ereignis)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 & \text{(sicheres Ereignis)} \end{cases}$

(3) F_X ist rechtsseitig stetig: $\lim\limits_{x_n \downarrow x} F_X(x_n) = F_X(x)$

(4) $\boxed{P[X \in (a,b]] = \mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)}$

(5) $P[X > a] = 1 - F_X(a)$

Denn: $\mathbb{P}[\underbrace{X > a}_{A}] = 1 - \mathbb{P}[\underbrace{X \leq a}_{\bar{A}}] = 1 - F_X(a)$