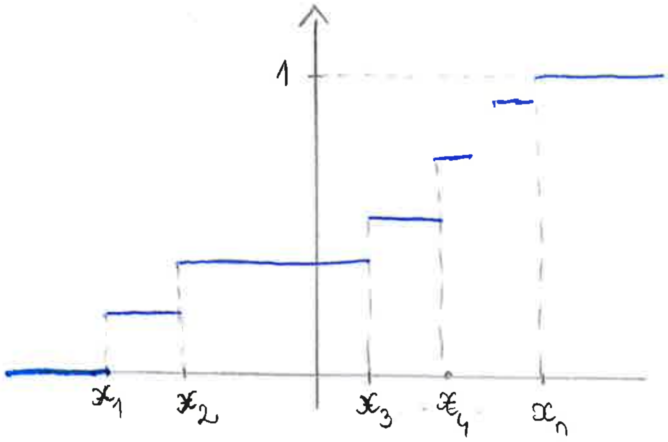
Verlauf der Verteilungsfunktion

a) X : ZV diskret

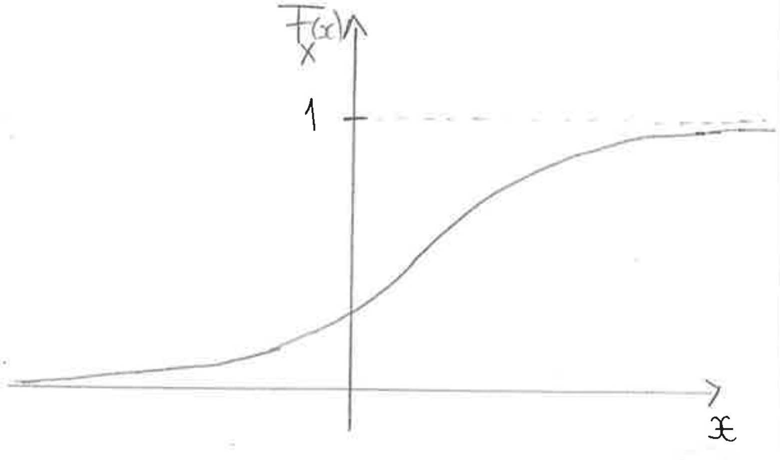
$F_X(x)$: Treppenfunktion

X nimmt Werte $\{x_1, x_2, .. x_n\}$



b) X : ZV stetig

$F_X(x)$ eine stetige Funktion



5.2. Wahrscheinlichkeitsfunktion (W-Funktion) (auch Wahrscheinlichkeitsverteilung)

A. X diskrete Z.V

- $X \to$ endlich viele oder abzählbar viele Werte $\{x_1, x_2, \dots\}$

Def : Die W-Funktion von X ist definiert als

$$\boxed{p_X(x) = \mathbb{P}[X = x]}$$

W-Tabelle von X :

x	x_1	x_2		x_n
$\mathbb{P}[X=x]$	$p_X(x_1)$	$p_X(x_2)$		$p_X(x_n)$

- $p_X(x)$ ist auch diskrete Dichte genannt.

Bemerkung ⓪ Die Verteilungsfkt. F_X einer diskreten Z.V X ist eine Treppenfkt (siehe Bild links oben) mit

$x_1, x_2, \dots, x_n \to$ Sprungstellen (Sprunghöhen)

- $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}[X = x_i] = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$

Satz: Die W-Funktion p_X besitzt die folgenden Eigenschaften

(i) $p_X(x) \geq 0$

(ii) $p_X(x)$ ist normiert, d.h. $\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1}$

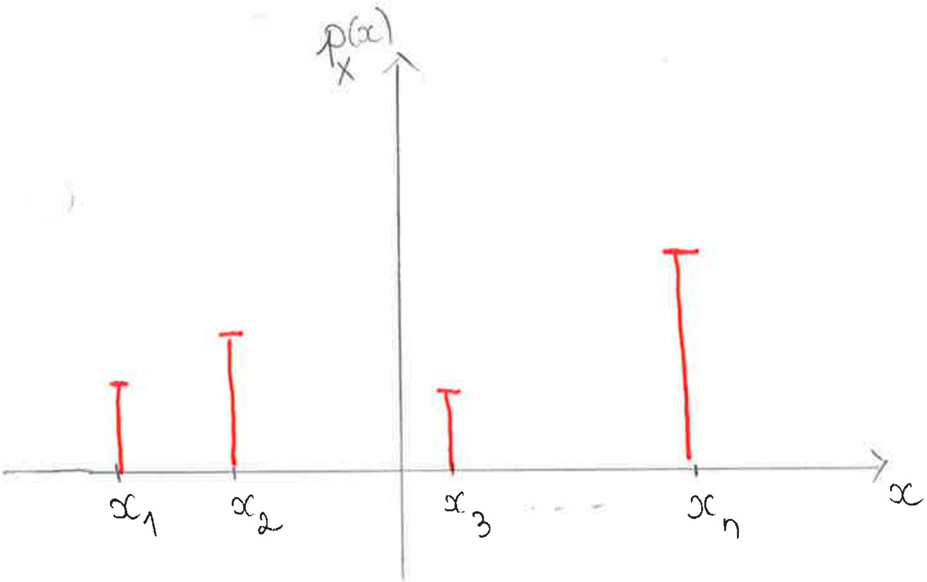
(iii) $\mathbb{P}[a < X \leq b] = \sum_{a < x_i \leq b} p_X(x_i)$.

Beweis von (iii):

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaften} \\ \text{Verteilungsfkt} \\ \text{Seite 38}}}{=} F_X(b) - F_X(a) = \sum_{x_i \leq b} p_X(x_i) - \sum_{x_i \leq a} p_X(x_i)$$

$$= \sum_{a < x_i \leq b} p_X(x_i).$$

□



Bsp (1) 2 × Würfeln : $\Omega = \{(i,j) \; ; j,i = 1, \dots 6\}$

Sei $X = X(\omega)$ = Augensumme beider Würfel

$X \in \{2, \dots, 12\}$; $\mathbb{P}[(i,j)] = \frac{1}{36}$, $\forall (i,j) \in \Omega$

$X : \Omega \to \{2, \dots, 12\}$; $X(i,j) = i+j$

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
$\mathbb{P}[X=i] = p_X(i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$\mathbb{P}[X \le i] = F_X(i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1	

Also

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 2 \\ \sum_{x=2}^{k} p_X(x), & \text{für } k \le x < k+1 \quad (\text{mit } k \in \{2,3,..11\}) \\ 1, & \text{für } x \ge 12 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[3 \le X \le 5] = \mathbb{P}[2 < X \le 5] = F_X(5) - F_X(2) = \frac{10}{36} - \frac{1}{36} = \frac{9}{36}$$

oder

$$\mathbb{P}[3 \le X \le 5] = \mathbb{P}[X=3] + \mathbb{P}[X=4] + \mathbb{P}[X=5] = \frac{2+3+4}{36} = \frac{9}{36}$$

Bsp 2: Eine Urne mit 3 weiße + 2 schwarze Kugeln. 3 Kugeln werden gezogen (mit zurücklegen). [Reihenfolge berücksichtigt). Sei X = Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln

F_X und p_X = ?

$\Omega = \{www, sww, wsw, wws, ssw, sws, wss, sss\}$

$X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$

$$\mathbb{P}[www] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}[sww] = \mathbb{P}[wsw] = \mathbb{P}[wws]}_{1 \text{ Schwarz}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125}$$

x_i	0	1	2	3
$p_X(x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$
$F_X(x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{27+54}{125}=\frac{81}{125}$	$\frac{117}{125}$	1

$\sum = 1$

$$\mathbb{P}[SSW] = \mathbb{P}[SWS] = \mathbb{P}[WSS] = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{125}$$

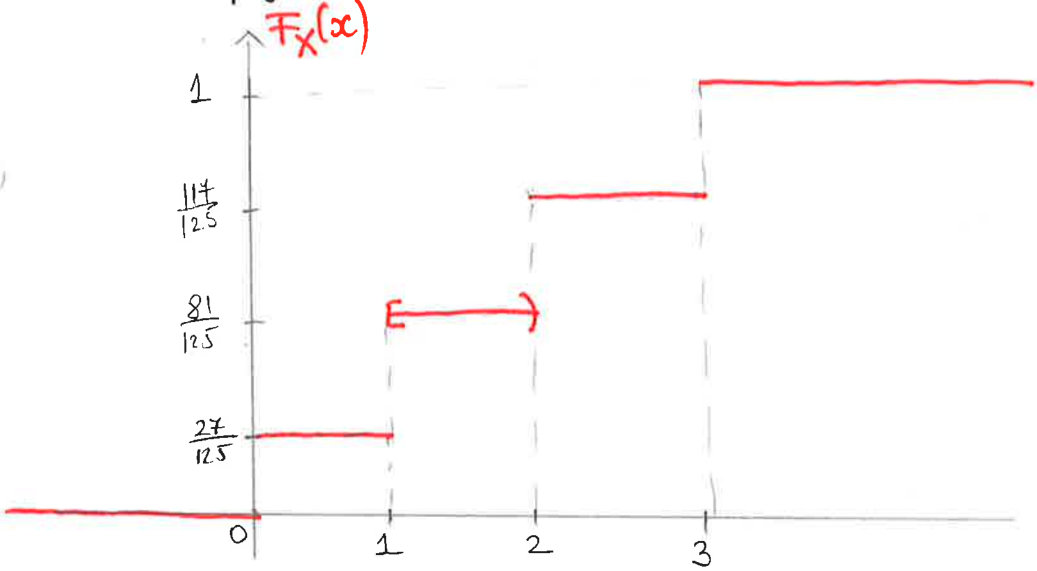
$$\mathbb{P}[SSS] = \frac{8}{125}$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}[X=0] = \mathbb{P}[WWW] = \frac{27}{125}$$

$$p_X(1) = \mathbb{P}[X=1] = \mathbb{P}[SWW] + \mathbb{P}[WSW] + \mathbb{P}[WWS] = 3\cdot\frac{18}{125} = \frac{54}{125}$$

$$p_X(2) = 3\cdot\frac{12}{125} = \frac{36}{125}$$

$$p_X(3) = \frac{8}{125}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{27}{125} & , \ 0 \le x < 1 \\ \frac{81}{125} & , \ 1 \le x < 2 \\ \frac{117}{125} & , \ 2 \le x < 3 \\ 1 & , \ x \ge 3 \end{cases}$$

B. X stetige Z.V

Def: Sei X eine Z.V mit Verteilungsfkt $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$.
X heißt stetig, wenn es eine Funktion $f_X : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ existiert sodass

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt}$$

f_X heißt dann **Dichtefunktion von X**.

- f_X legt die Verteilungsfkt. F_X von X eindeutig fest

Bemerkung: Eine Funktion f_X ist genau dann Dichte einer ZV X, wenn

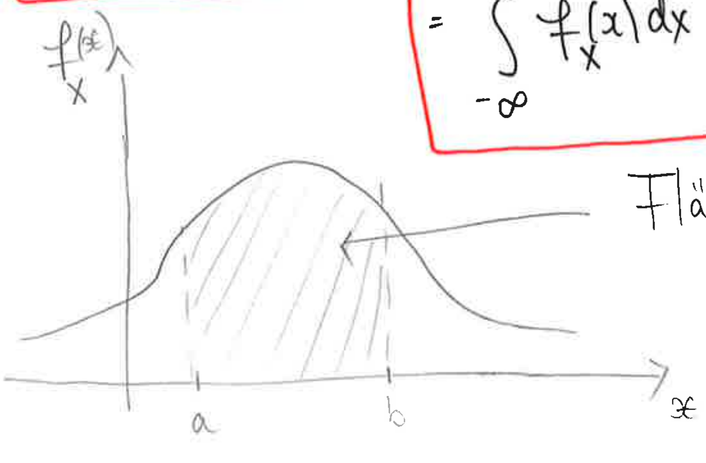
- $f_X(x) \geq 0 \quad , \forall x$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (Normierung)

Eigenschaften:

Es gilt dass (1:) $F_X'(x) = f_X(x)$, falls f_X in x stetig ist.
(F_X ist eine Stammfkt. der Dichte $f_X(x)$)

(2) Für $b > a$:

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$
$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{a}^{b} f_X(x)\,dx$$



Flächeninhalt $\int_a^b f_X(x)\,dx = \mathbb{P}[a \leq X \leq b]$

Achtung! Für stetige ZV X es gilt stets

$$\mathbb{P}[X = x] = 0 \quad , \forall x$$

Denn:

$$\mathbb{P}[X = x] = \mathbb{P}[X \le x] - \mathbb{P}[X < x_0] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt - \underbrace{\lim_{x_0 \to x^-} \int_{-\infty}^{x_0} f_X(t)\,dt}_{\lim_{x_0 \to x^-} F_X(x_0) = F_X(x)} = F_X(x) - F_X(x) = 0$$

! Die Dichtefkt. kann in endlich viele Pkt. geändert werden ohne dass sich die Verteilungsfkt. ändert!

Bsp (1) Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

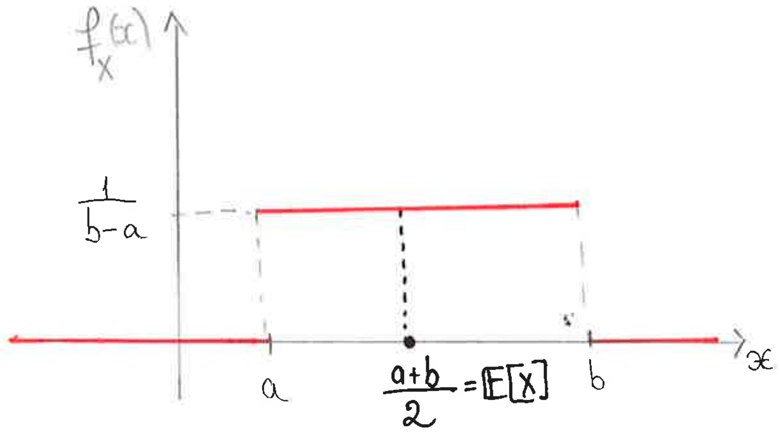
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Eine ZV X heißt gleichverteilt auf $[a,b]$, wenn f_X (Dichtefkt):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \le x \le b \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

a) Ist f_X eine Dichtefkt?

$f_X(x) \ge 0$ ✓

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b 1\,dt = \frac{1}{b-a}\, t \Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$ ✓



b) Verteilungsfkt $F_X = ?$ $\qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

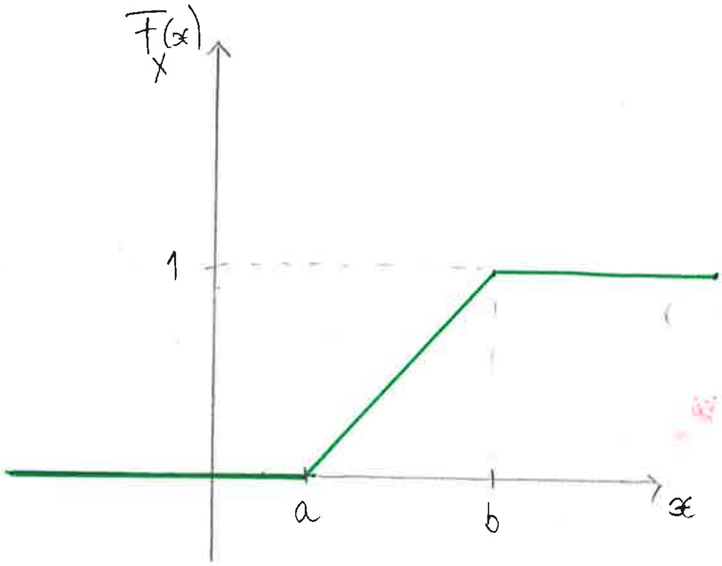
$x < a$: $F_X(x) = 0$

$x > b$: $F_X(x) = 1$

$x \in [a,b]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\, t \Big|_a^x =$

$$= \frac{x-a}{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \; a \le x \le b \\ 1 & , \; x > b \end{cases}$$



c) Sei $a = 3$ und $b = 6$. Berechnen Sie $P[4 \le X < 8] = ?$

$P[4 \le X < 8] = P[4 \le X \le 8] = F_X(8) - F_X(4) = 1 -$

$\frac{4-3}{6-3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Bsp (2): [Dreiecksverteilung im [0,2]]

Sei X eine ZV, mit Dichtefkt

$$f_X(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x \le 1 \\ 2-x & , \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f_X eine Dichtefkt ist.

b) Verteilungsfkt F_X von X $= ?$

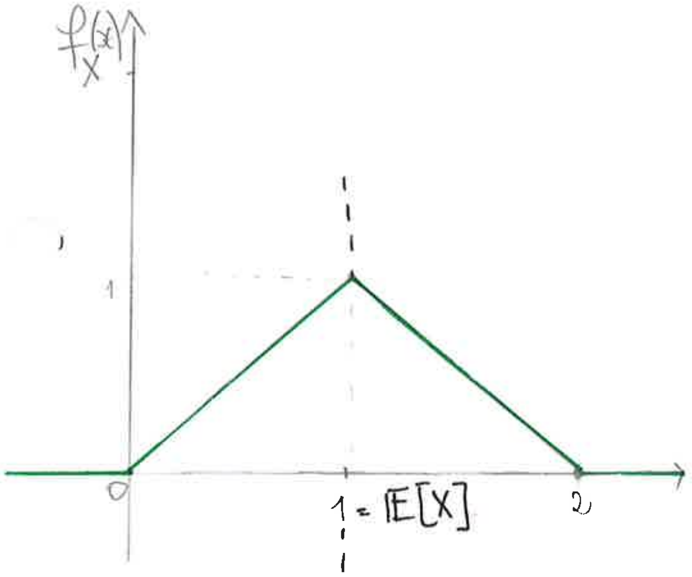
c) $P\left[\frac{1}{2} < X \le \frac{5}{4}\right] = ?$

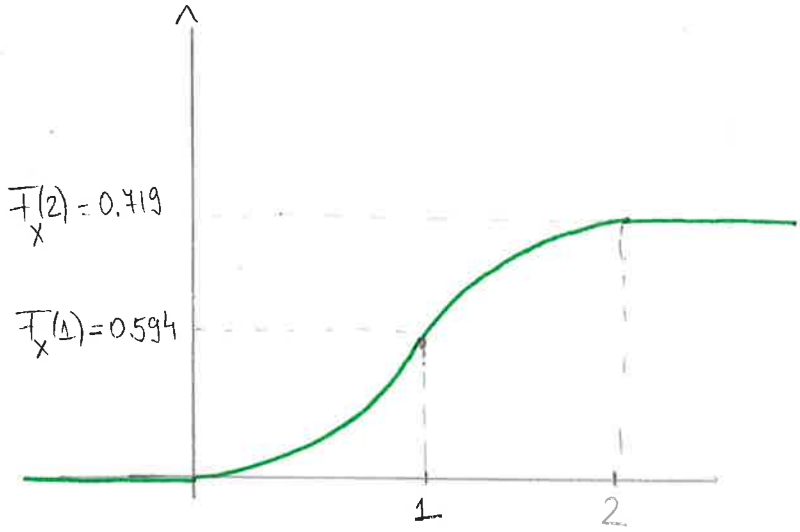
a) • $f_X(x) \geq 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

• Normierung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(2 \cdot 2 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$





b) $\underline{x < 0}$: $F_X(x) = 0$

$\underline{x \in [0,1]}$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$

$\underline{x \in [1,2]}$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt + \int_1^x (2-t)\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 +$

$$\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

$\underline{x > 2}$: $F_X(x) = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & , x > 2 \end{cases}$$

c) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{2} < X \leq \frac{5}{4}\right] = F_X\left(\frac{5}{4}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} f_X(t)\,dt =$

$$= \frac{23}{32} - \frac{1}{8} = 0.59375$$

5.3 KENNGRÖßEN VON VERTEILUNGEN (AUCH KENNWERTE VON Z.V)

X Z.V, $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$

- diskret: W!-Fkt: $p_X(x) = \mathbb{P}[X = x]$
- stetig: Dichte $f_X(x) = F_X'(x)$.

! Kenngrößen beschreiben nur gewisse Teilaspekte der Verteilung.

wie z. B.:

→ "Zentrum der W'keiten" (Welchen Wert hat man von X zu erwarten)? ≈ $\boxed{\text{Erwartungswert}}$.

→ Wie groß ist der Streubereich um den erwarteten Wert? ≈ $\boxed{\text{Varianz}}$

→ W'keiten symmetrisch oder unsymmetrisch um den Erwartungswert? ≈ $\boxed{\text{Standardabweichung}}$

ERWARTUNGSWERT VON X : $E[X]$

Def: Sei X eine Z.V

(1) Wenn X diskrete Z.V, sei $p_X(x_i) = \mathbb{P}[X = x_i]$ die W! fkt. von X. Dann ist Erwartungswert von X, $E[X]$ so definiert:

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_X(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \mathbb{P}[X = x_i]}$$

(2) Wenn X stetig ist, sei f_X die Dichte von X. Dann heißt

$$\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx}$$

der Erwartungswert von X.

Bemerkung : zu Def von $\mathbb{E}[X]$

(1) X diskret $\to$ abzählbar endlich / unendlich viele Werten.

- X nimmt endlich viele Werten an, dann ist $\mathbb{E}[X]$ eine endliche Summe $\to$ $\mathbb{E}[X] < \infty$

- X nimmt abzählbar unendlich viele Werten an $\to$ $\mathbb{E}[X]$ ist eine unendliche Summe (Reihe) $\to$ Kann Konvergieren oder divergieren. $(\mathbb{E}[X] = \infty)$

Deswegen wird absolute Konvergenz vorrausgesetz :
d.h [die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_X(x_i)$ ist absolut Konvergent wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \, p_X(x_i)$ Konvergent]

Andernfalls besitzt X keinen $\mathbb{E}[X]$.

(2) X stetig : wird vorrausgesetzt dass das integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)$ existiert. Andernfalls besitzt X keinen $\mathbb{E}[X]$.

Bsp 1) Seite 41 ✓ Bsp 1 2 × Würfeln

X = Augensumme ; $X \in \{2, 3, \dots, 12\}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=2}^{12} i \, \mathbb{P}[X = i] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

2) Seite 41 ✓ Bsp Urne ; X = # gezogenen schwarzen Kugel

$X \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{3} i \, \mathbb{P}[X = i] = 0 \cdot \frac{27}{125} + 1 \cdot \frac{54}{125} + 2 \cdot \frac{36}{125} + 3 \cdot \frac{8}{125} =$$

$$= \frac{24 + 72 + 54}{125} = \frac{150}{125} = 1{,}2$$