(3) Bsp (1) Seite 44 : Rechteckverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \; a \leq x \leq b \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_a^b x f_X(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} =$$

$$= \frac{(b+a)}{2}$$

(4) Bsp (2) Seite 45 : Dreieckverteilung : $E[X] = ?$

$$f_X(x) = \begin{cases} x & , \; 0 < x < 1 \\ 2-x & , \; 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot x \, dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 +$$

$$\left. \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right|_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 3 + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= 3 - 2 = 1$$

Erwartungswert einer Funktion von X

Satz : Sei X eine Z.V , d.h $X: \Omega \to \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reel-Wertige Fkt. Dann ist $Y = g(X)$ auch eine Z.V.

Bsp : X Z.V

$g(t) = t^2$. Dann ist $Y = X^2$ eine Z.V.

Def Sei X eine Z.V und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y = g(X)$. Sei f_X Dichte von X (X stetig), bzw. p_X diskrete Dichte (W! Fkt, falls X diskret) und gelte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x)\, dx < \infty \quad \text{bzw} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |g(x_i)| p_X(x_i) < \infty .$$

Dann heißt
$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, p_X(x_i) & \text{, für } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx & \text{, für } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Erwartungswert von $Y = g(X)$.

Spezialfälle:

(1) $\boxed{g(x) = x}$ Dann ist $g(X) = X$ und $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[X] = \mu$

(2) $\boxed{g(x) = x^k}$ Dann $g(X) = X^k$ und

$\mathbb{E}[X^k] := \mu_k$: k-tes Moment von X.

$\mathbb{E}[X] := \mu_1$

(3) Die k-ten zentralen Momenten:

Sei $\boxed{g(x) = (x-\mu)^k}$; $g(X) = (X-\mu)^k$, $\mu = \mathbb{E}[X]$

und $\alpha_k := \mathbb{E}[(X-\mu)^k]$

$k = 1$: $\alpha_1 = 0$

$k = 2$ α_2 wird auch σ^2 bezeichnet

σ^2 = Varianz von X $= \mathrm{Var}[X]$
$= \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$

51

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \, p_X(x_i) & , \quad X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) & , \quad X \text{ stetig} \end{cases}$$

wo $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Def Standardabweichung σ von X ist definiert durch

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

Lemma [Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz]

ERWARTUNGSWERT $\mathbb{E}[X]$

(1) $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$

(2) $\mathbb{E}[X]$ ist eine lineare Fkt:

$\mathbb{E}[aX + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$

$\mathbb{E}[g(X) + h(X)] = \mathbb{E}[g(X)] + \mathbb{E}[h(X)]$

für $a, b \in \mathbb{R}$; $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

VARIANZ VAR(X)

(1) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$

(2) Verschiebungssatz

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

(3) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \, \mathrm{Var}(X)$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$

(4) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(-X)$

Bsp

(1) Var (X), für Bsp 1 Seite 41 ; $\mathbb{E}[X] = 7$ (Seite 48)

$$Var(X) = \sum_{i=2}^{12} (i-7)^2 p_X(x_i) = (-5)^2 \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X=2]}_{\frac{1}{36}} + (-4)^2 \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X=3]}_{\frac{2}{36}} + \ldots$$

$$5^2 \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X=12]}_{\frac{1}{36}} =$$ weiter ausrechnen ...

oder mit Verschiebungssatz für Varianz

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{7})^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=2}^{12} i^2 p_X(x_i) = \ldots\ldots$$ weiter ausrechnen

(2) Var(X) für Bsp (2) Seite 45 Dreiecksverteilung

$\mathbb{E}[X] = 1$ (Seite 49 ausgerechnet, Bsp (4))

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{1})^2 = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot x\,dx + \int_1^2 x^2 (2-x)\,dx = \ldots$$

= bitte weiter ausrechnen

ZUSAMMENFASSUNG KAPITEL V:

X Z.V

$X:\Omega\to\mathbb{R}$	X diskret $X\in\{x_1,x_2,\dots\}$	X stetig
Verteilungsfunktion $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$	$F_X(x)=\mathbb{P}[X\le x]$ Eigenschaften: mon. wachsend, rechtsseitig stetig	$F_X(x)=\mathbb{P}[X\le x]$
Dichtefkt:	Diskrete Dichte oder W!keitsfunktion $p_X(x_i)=\mathbb{P}[X=x_i]$	(Stetige) Dichte $f_X:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$; $f_X(x)=F_X'(x)$ falls F_X stetig in x.
	Eigenschaften: $p_X(x)$ • $p_X(x)\ge 0$ • $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i)=1$ • $\mathbb{P}[a<X\le b]=\sum_{a<x_i\le b} p_X(x_i)$	Eigenschaften $f_X(x)$ • $f_X(x)\ge 0$ • $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=1$ • $\mathbb{P}[a<X\le b]=\int_a^b f_X(x)\,dx$
Dichte ⇒ Verteilungsfkt	$F_X(x)=\sum_{x_i\le x} p_X(x_i)$	$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$
Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\,p_X(x_i)$	$\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx$
Varianz $Var(X)$	$\mathbb{E}[X]=\mu$ $Var(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-\mu)^2 p_X(x_i)$	$\mathbb{E}[X]=\mu$ $Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f_X(x)\,dx$
Standardabweichung $\sigma=\sqrt{Var(X)}$	$Var(X)=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2$	

Wichtig!

$X\to$ stetig, Dichte f_X

Die Dichtefkt. kann in endlich vielen Punkten geändert werden, ohne dass sich die Verteilungsfkt. F_X ändert (Also: Dichtefkt. nicht eindeutig)

auch auf Seite 44 (Achtung!)

KAPITEL VI: DISKRETE VERTEILUNGEN

Inhalt:

- Binomialverteilung $\mathcal{B}(n,p)$
- Geometrische Verteilung $G(p)$
- Hypergeometrische Verteilung (nur Erinnern dass $\exists$)
- Poisson Verteilung $\mathcal{P}(\lambda)$

6.1. BINOMIALVERTEILUNG.

- Zufallsexp mit nur 2 verschiedenen möglichen Ausgänge führen zu Binomialverteilung.

Bernoulli experiment: 2 Ausgänge werden mit Erfolg und Mißerfolg bezeichnet.

$$\mathbb{P}[\text{Erfolg}] = p$$
$$\mathbb{P}[\text{Mißerfolg}] = 1-p$$

$$\Omega = \{\text{Erfolg}, \text{Mißerfolg}\}$$

- Sei Y eine Z.V, $Y: \Omega \to \{0,1\}$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{falls Erfolg} \\ 0, & \text{falls Mißerfolg} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[\text{Erfolg}] = \mathbb{P}[Y=1] = p$$
$$\mathbb{P}[\text{Mißerfolg}] = 1 - \mathbb{P}[Y=1] = 1-p$$

Binomialverteilung: Ein Bernoulli-exp wird n-mal wiederholt, unabhängig voneinander. Sei X die (zufällige) Anzahl der Erfolge bei n-Versuche, wobei jeden Versuch führt zu Erfolg mit W!-keit p. Dann folgt X eine Binomialverteilung mit Parameter n und p: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n,p)}$

- Die Wiederholungen werden durch unabhängige Z.V $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ beschrieben : $Y_i := \begin{cases} 1 & \text{, Erfolg beim } i\text{-ten Versuch} \\ 0 & \text{, Mißerfolg beim } i\text{-ten Versuch.} \end{cases}$

Dann $\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} Y_i}$

W!-Fkt. von X : $p_X(k) = P[X = k]$

$X \sim B(n,p)$

- Die W!keit dass k Erfolge und $(n-k)$ Mißerfolge bei n unabhängigen Versuchen eintreten ist $p^k (1-p)^{n-k}$. Die Reihenfolge der Erfolge muss auch festgelegt werden : es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Erfolge aus n Versuche auszuwählen. $\Rightarrow$

$$\boxed{p_X(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

W-Funktion von $X \sim B(n,p)$.

Frage : Ist $p_X(k)$ eine W-Funktion?

- $p_X(k) \geq 0$, $\forall k$ ✓
- $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) \overset{?}{=} 1$

$$\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bin. Lehrsatz!}}}{=} (p + (1-p))^n = 1^n = 1 \quad ✓$$

Satz : Die Kennwerte von $X \sim B(n,p)$ lauten

Erwartungswert : $E[X] = n \cdot p$

Varianz $Var(X) = n p (1-p)$

ERWARTUNGWERT:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \underbrace{P[X=k]}_{p_X(k)} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k\, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))} p^{k-1} \cdot p (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

Index-Verschiebung $k-1=j$; dann geht j von 0 bis $n-1$

$$= n \cdot p \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} \underset{\text{Bin-Lehrsatz}}{=} n \cdot p \, (\underbrace{p + (1-p)}_{1})^{n-1} = 1$$

Binomischer Lehrsatz:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

VARIANZ VON $X \sim B(n,p)$:

$$Var(X) = E[X^2] - (\underbrace{E[X]}_{np})^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} + (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

Index-Verschiebung : $k-1=j$ (j geht von 0 bis $n-1$)

$$= n\cdot p \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} =$$

$$= np \Bigg[\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}}_{\substack{= \mathbb{E}[Y], \text{ wenn } Y \sim B(n-1,p) \\ = (n-1)p}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}}_{(p+(1-p))^{n-1} = 1} \Bigg]$$

$$= np\,[(n-1)p + 1] = n(n-1)p^2 + np = \mathbb{E}[X^2]$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Var}(X) = np(1-p).}$$

Bsp: Ein homogener Würfel wird 100-mal geworfen. Wie oft dürfen wir eine gerade Augenzahl erwarten?

Erfolg = "gerade Augenzahl"

Sei X = Anzahl der Erfolge in 100 Versuche.

$$\mathbb{P}[\text{Erfolg}] = \frac{1}{2}$$

$$X \sim B\left(100, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{100-k}$$

$k = 0, \dots, 100$

$$\mathbb{E}[X] = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

6.2 GEOMETRISCHE VERTEILUNG

- Wiederhole ein Bernoulli-experiment (2 Ausgänge: Erfolg und Mißerfolg) so oft bis Erfolg eintritt.

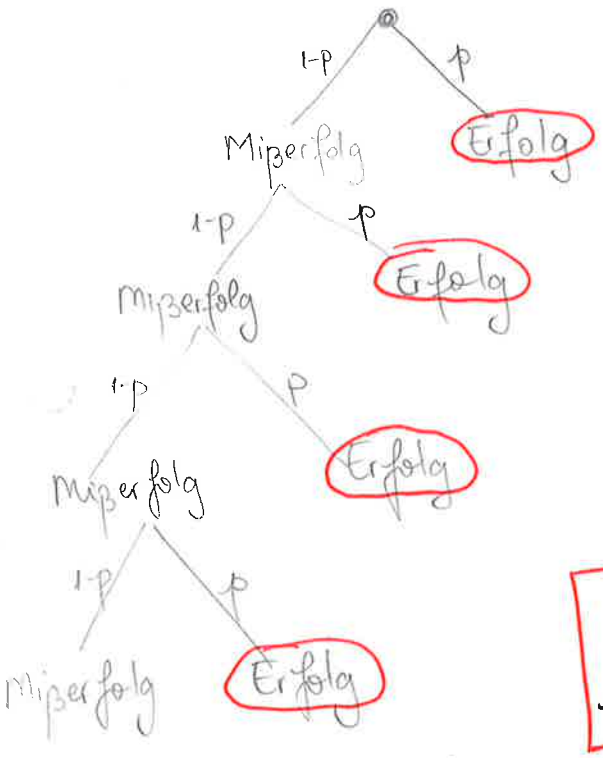
Sei $p = \mathbb{P}[\text{Erfolg}]$ und

X = Anzahl der Versuche bis zum ersten mal Erfolg eintritt.

Def: Dann hat X eine Geometrische Verteilung mit Parameter p, schreibweise $X \sim \text{Geom}(p)$, mit W-Funktion (diskrete Dichte) wie folgt:

$$p_X(k) = \mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1} p .$$

Wertebereich von X is $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$



Bemerkung ! Mit W'keit 1, $X \sim \text{Geom}(p)$ ist endlich, d.h mit W'keit 1 kommt irgendwann ein Erfolg:

$$\mathbb{P}[X < \infty] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p =$$

$$= p \frac{1}{1-(1-p)} = p \frac{1}{p} = 1$$

Satz: Die Kennwerte von $X \sim \text{Geom}(p)$ lauten: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ und $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Beweis: $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[X = k] = p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} = -p \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-p)^k\right)'$

$$= p \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k\right)' = -p \left(\frac{1}{1-(1-p)}\right)' = -p \left(\frac{1}{p}\right)' = -p \left(\frac{-1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \big(\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\frac{1}{p}}\big)^2$$ → Als Aufgabe lassen.

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} \big(k(k-1)+1\big)\cdot(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p\,k\,(1-p)^{k-1}}_{\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}} =$$

$$= p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \frac{1}{p} = p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty}\left((1-p)^k\right)'' + \frac{1}{p}$$

$$= p(1-p)\left(\sum_{k=2}^{\infty}(1-p)^k\right)'' + \frac{1}{p} = p(1-p)\left(\frac{1}{p} - (1-p) - 1\right)'' + \frac{1}{p} =$$

$$= p(1-p)\,\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$ $\square$

Bsp (1) Mensch ärgere dich nicht!

Wie groß ist die W'keit, dass man bei ersten 3 Würfen eine 6 würfelt?

Erfolg = "eine 6 zu würfeln" $\quad p = \mathbb{P}[\text{Erfolg}] = \frac{1}{6}$

Mißerfolg = "was anderes ausser 6 zu würfeln"

$1-p = \mathbb{P}[\text{Mißerfolg}] = \frac{5}{6}$

X = "Anzahl Versuche bis zum 1. mal 6 vorkommt"

$$\mathbb{P}[X \le 3] = \mathbb{P}[X=1] + \mathbb{P}[X=2] + \mathbb{P}[X=3] = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$

$X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)$; $\mathbb{E}[X] = 6$

$$= \frac{91}{216} = 42{,}13\,\%$$