Bsp (2) : St. Petersburg Paradox

Münzwurf Spiel: falls beim k-ten Wurf erstmals Kopf kommt, gewinnt man 2^k €. Was ist erwarteter Gewinn?

Sei X = "Gewinn" = $\begin{cases} 2^1, & \text{falls 1-Wurf Kopf } (Y=1) \\ 2^2, & \text{falls 2-Wurf Kopf } (Y=2) \\ 2^3, & \text{falls Kopf zum ersten mal beim 3. Wurf} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \, \mathbb{P}[Y=k] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$Y \sim \text{Geom}(\tfrac{1}{2})$

$\Rightarrow$ Erwartungswert existiert nicht!

6.3 HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG.

Wurde in Kapitel III, im Zusammenhang mit Urnenmodelle eingeführt, auf Seite 16:

Urne: N Kugeln, M rote & $N-M$ blaue; n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Sei X = Anzahl der roten gezogenen Kugeln.

Def: Dann sagt man dass X eine Hypergeometrische Verteilung mit Parametern N, M, n, $X \sim H(N, M, n)$, mit W-Fkt.

$$p_X(k) = \mathbb{P}[X=k] = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{mit } \max(0, n-(N-M)) \le k \le \min(M, n)$$

Satz: $E[X] = n\dfrac{M}{N}$ und $Var(X) = n\dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$.

Beweis: auf Folie [ ]

Bemerkung: Wenn $X \sim H(N, M, n)$, $\boxed{n \ll N, \ k \ll M, \ n-k \ll N-M}$, mit $p = \frac{M}{N}$ dann kann man die Hypegeometrische Verteilung durch Binomialverteilung $B(n, p)$ approximiert werden:

$$B\Big(n, \underset{\frac{M}{N}}{\underset{\|}{p}}\Big)$$

$$\lim_{N,M\to\infty} \underbrace{\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}_{p_X(k) \text{ für } H(N,M,n)} = \underbrace{\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}}_{p_X(k) \text{ für } X \sim B\left(n, \underset{p}{\underset{\|}{\frac{M}{N}}}\right)}, \text{ für } p = \frac{M}{N} \text{ und } k \text{ fest.}$$

Faustregel für Approximation

$$\boxed{H(N, M, n) \approx B\left(n, \frac{M}{N}\right) \text{ falls } \begin{cases} N \geq 30 \\ \frac{n}{N} \leq \frac{1}{10} \end{cases}}$$

Erwartungswert und Varianz der hypergeometrischen Verteilung:

Sei X eine hypergeometrische Verteilung mit den Parametern $N, M, n \in \mathbb{N}$ mit $M \leq N$, d.h.

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für } k \in \{0, 1, \ldots, \min\{M, n\}\}.$$

Zunächst wollen wir den Erwartungwert von X berechnen. Dazu benötigen wir folgende Gleichung für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \geq b$:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)!}{b(b-1)!\big((a-1)-(b-1)\big)!} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung berechnen wir nun $\mathbb{E}X$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\min\{M,n\}} k \cdot \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\frac{M}{k}\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{nM}{N} \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Wieder machen wir eine Indexverschiebung mittels $l = k-1$ (bzw. $k = l+1$). Dabei beachte man, daß $\min\{n, M\} - 1 = \min\{n-1, M-1\}$ gilt. Somit:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{nM}{N} \underbrace{\sum_{l=0}^{\min\{M-1,n-1\}} \underbrace{\frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{=\mathbb{P}[Y=l]}}_{=1} = \frac{nM}{N},$$

wobei Y eine hypergeometrisch-verteilte Zufallsvariable ist mit dem folgenden Modell: aus $N-1$ Kugeln (davon $M-1$ rote Kugeln und $(N-1)-(M-1)$ blaue Kugeln) ziehe man $n-1$ Kugeln ohne Zurücklegen; Y beschreibt die Anzahl der roten Kugeln, die gezogen wurden.

Zur Berechnung der Varianz von X benötigen wir $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{\min\{M,n\}} k^2 \cdot \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k^2 \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k^2 \cdot \frac{\frac{M}{k}\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{nM}{N} \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Wiederum machen wir eine Indexverschiebung durch $l = k-1$ und wir erhalten analog zur Berechnung von $\mathbb{E}X$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{nM}{N} \sum_{l=0}^{\min\{M-1,n-1\}} (l+1) \cdot \frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{nM}{N}\Bigg[\underbrace{\sum_{l=0}^{\min\{M-1,n-1\}} l \cdot \frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{=\frac{(n-1)(M-1)}{N-1}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\min\{M-1,n-1\}} \frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{=1}\Bigg] \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \left[\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1\right].
\end{aligned}$$

Die Varianz ist nun gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{nM}{N} \cdot \left[\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1\right] - \frac{n^2M^2}{N^2} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \left[\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1 - \frac{nM}{N}\right] \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{(n-1)(M-1)N + (N-1)N - nM(N-1)}{(N-1)N} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{nMN - MN - nN + N + N^2 - N - nMN + nM}{(N-1)N} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{N^2 + nM - nN - MN}{(N-1)N} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{(N-1)N} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}.
\end{aligned}$$

Beispiel:

In einer Lostrommel befinden sich 1000 Lose, wobei 75 Gewinnlose darunter sind. Es werden 10 Lose gezogen. Man berechne die erwartete Anzahl X von Gewinnen, sowie die Varianz und Standardabweichung von X.

$\mathbb{P}[X=k] = \frac{\binom{75}{k}\binom{925}{10-k}}{\binom{1000}{10}}$; $k = 0, \ldots, 10$

$\mathbb{E}[X] = 10 \cdot \frac{75}{1000} = 0{,}75$

6.4. Poisson Verteilung

Def: Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ eine ZV. Dann ist X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls die W-Fkt:

$$\boxed{p_X(k) = \mathbb{P}[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Schreibweise: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Bemerkungen:

1) Poisson-Verteilung entsteht aus der Binomialverteilung, falls der Erfolgsparameter p sehr klein ist und n (Anzahl Versuche) $\to \infty$.
2) $\mathcal{P}(\lambda)$ wird auch die "Verteilung der seltenen Ereignisse" bezeichnet!
3) Ist $p_X(k)$ tatsächlich eine Dichte-Fkt?
   - $p_X(k) \geq 0, \ \forall k$
   - $\sum_{k\geq 0} p_X(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

$$\boxed{e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}}$$

Satz Kenngrößen von $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

$Var(X) = \lambda$

Beweis: $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

$k-1=j$

$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$

$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda = \mathbb{E}[X^2]$$

$$\Rightarrow Var(X) = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda$$

Weitere Bemerkunken:

- Oft werden Sachverhalte durch Poisson-Verteilungen modelliert, wobei in einem Zeitintervall die durchschnittliche Anzahl von eintretenden Ereignissen bekannt ist.

  λ = Durchschnittswert.

- ...

Faustregel für Approximation (Poisson $\approx$ Binomial)

$$\boxed{\text{Wenn } X \sim \mathcal{B}(n,p) \text{ und } Y \sim \mathcal{P}(\underset{n\cdot p}{\underset{\parallel}{\lambda}}), \text{ dann } \mathbb{P}[Y=k] \approx \mathbb{P}[X=k] \text{ falls } n \geq 30, \text{ und } p \leq \tfrac{1}{10}}$$

Wichtig für Übungen

Sei $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; X = Anzahl der eintretenden Ereignisse in einem Zeitintervall $[0,1]$

Y = Anzahl Ereignissen in $[0,t]$.

Dann ist $\boxed{Y \sim \mathcal{P}(\lambda t)}$

Bsp: An einer gefährlichen Straßenkreuzung finden im Durchschnitt zwei Unfälle pro Woche statt. Anzahl der Unfälle/Woche werde durch eine Poisson-verteilte ZV X beschrieben.

$\mathbb{P}$[in eine Woche max 2 Unfälle] = ?

X = # Unfälle pro Woche ; $X \sim \mathcal{P}(2) \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

$$\mathbb{P}[X \leq 2] = \mathbb{P}[X=0] + \mathbb{P}[X=1] + \mathbb{P}[X=2] = e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 5e^{-2}$$

$$= 0{,}6767$$

KAPITEL VII: STETIGE VERTEILUNGEN.

Seiten 67-68 ✓ (Auf Folien auch)

Inhalt :
- Gleichverteilung auf $[a,b]$
  [Eingeführt auf Seite 44, BSp (1)]
  Erwartungswert Seite 49 (oben), Variant
- Exponentialverteilung
- Normalverteilung.

7.1 EXPONENTIALVERTEILUNG.

Def: $X : \Omega \to \mathbb{R}$, ist exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$, falls X die folgende Dichtefunktion besitzt:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$X \sim Exp(\lambda)$

- Auf Folien (Seiten 69-70-71).
  - → überprüfen dass $f_X(x)$ eine Dichte ist.
  - → Verteilungsfunktion $F_X(x)$
  - → $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
  - → $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  - → Bemerkungen !

Gedächtnislosigkeit der Exp. verteilung

~~St~~ **Satz**: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Z.V. Dann $X \sim Exp(\lambda) \iff$
$\forall x, y > 0 : \mathbb{P}[X > x + y \mid X > y] = \mathbb{P}[X > x]$.

Exp-verteilte Z.V : 1) Lebensdauer eines Verschleißteils; 2) Reparaturzeit von Maschinen; 3) Dauer eines Telefongesprächs; 4) Instandsetzungsdauer PKW.

Folie zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse"
24.11.2016

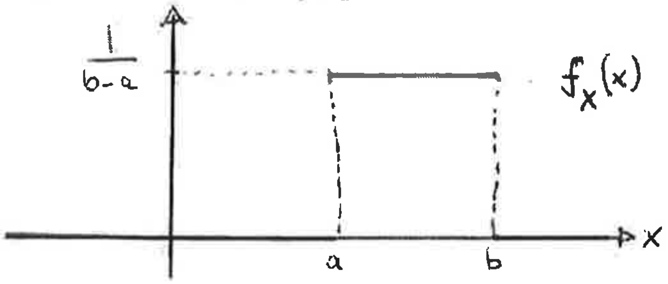
Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$: $X \sim \text{Unif}([a,b])$

Die stetige Zufallsvariable $X : \Omega \to [a, b]$ ist **gleichverteilt** auf dem reellen Intervall $[a, b]$, falls X die folgende Dichtefunktion besitzt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist tatsächlich eine Dichtefunktion, da $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$



Die Verteilungsfunktion $F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$ ist dann wie folgt gegeben:

$t < a$:

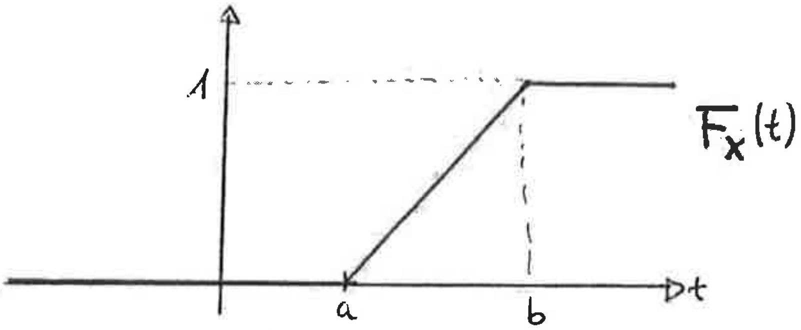
$$F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = 0.$$

$a \leq t \leq b$:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_a^t f_X(x)\,dx = \int_a^t \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^t = \frac{t-a}{b-a}.$$

$b < t$:

$$F_X(t) = \int_a^t f_X(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$



Es gilt somit für $a \leq c < d \leq b$:

$$\mathbb{P}[c \leq X \leq d] = F_X(d) - F_X(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{(d-a)-(c-a)}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}.$$

Erwartungswert von X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 \frac{1}{b-a}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Varianz von X benötigen wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 \frac{1}{b-a}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Varianz gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{4b^2+4ab+4a^3-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

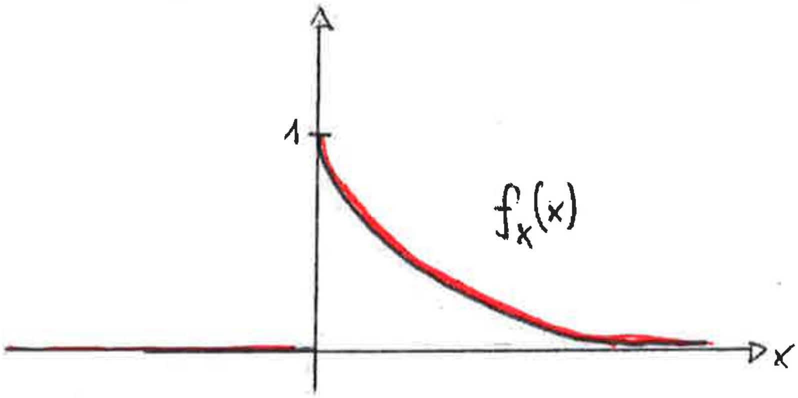
Exponentialverteilung: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Eine stetige Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq}$ ist **exponentialverteilt mit dem Parameter** $\lambda > 0$, falls X die folgende Dichtefunktion besitzt

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist tatsächlich eine Dichtefunktion, da $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 0 - (-e^0) = 1.$$



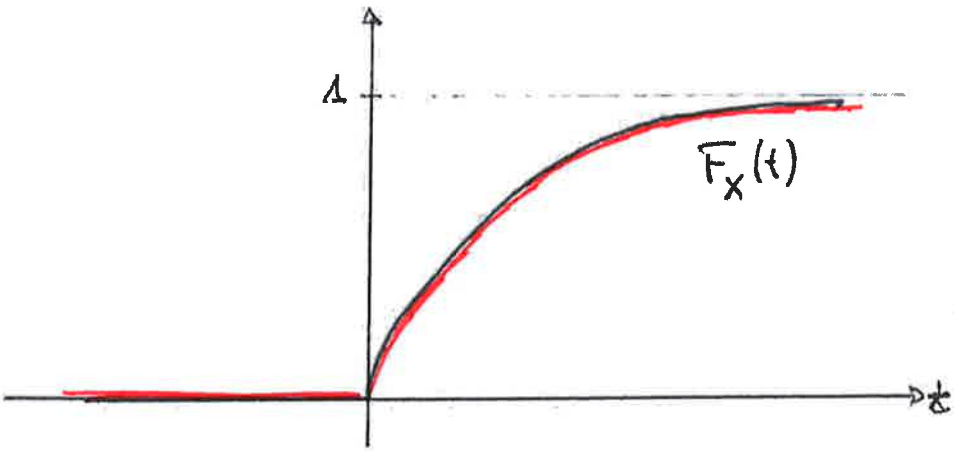
Die Verteilungsfunktion $F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$ ist dann wie folgt gegeben:

$t \leq 0$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = 0.$$

$t > 0$:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_0^t f_X(x)\,dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$



Erwartungswert von X: Zunächst

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{=f} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{=g'} dx.$$

Wir wenden nun partielle Integration an mit

$$f = x,\ g' = \lambda e^{-\lambda x} \quad \Longrightarrow \quad f' = 1,\ g = -e^{-\lambda x}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 - 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}e^0\right) = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Varianz von X benötigen wir:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x^2}_{=f} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{=g'} dx.$$

Wir wenden nun wieder partielle Integration an mit

$$f = x^2,\ g' = \lambda e^{-\lambda x} \quad \Longrightarrow \quad f' = 2x,\ g = -e^{-\lambda x}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2xe^{-\lambda x} dx \\ &= 0 - 0 + 2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx}_{=\mathbb{E}[X]=1/\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Somit ist die Varianz gegeben durch

$$\mathrm{Var}(X) \quad = \quad \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bemerkungen:

1. Die Exponentialverteilung wir häufig verwendet, um die Lebensdauer von technischen Komponenten zu modellieren.

2. In manchen Büchern ist die Dichtefunktion für $x > 0$ gegeben durch

$$(*) \quad f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}.$$

   Dies ist eine reine Frage der Paramatrisierung: ersetze $\lambda > 0$ durch den neuen Parameter $1/\lambda > 0$, woraus man diese alternative Beschreibung der Dichtefunktion erhält. Wenn die Dichtefunktion wie $(*)$ gegeben ist, so ist $\mathbb{E}(X) = \lambda$ und $\mathrm{Var}[X] = \lambda^2$. In unserer Vorlesung verwenden wir aber die eingangs erwähnte Darstellung der Dichte und **nicht** $(*)$.

3. Die **Restverteilung** von X ist gegeben durch

$$\mathbb{P}[X > t] = 1 - \mathbb{P}[X \leq t] = 1 - F_X(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} \quad \text{für } t > 0.$$

Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung:

Satz: Sei X eine Zufallsvariable. Dann gilt: X ist genau dann exponentialverteilt, falls für alle $x, y > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}[X > x + y \mid X > y] = \mathbb{P}[X > x]$$

Interpretation: Ein elektrisches Bauteil hat nach y Zeiteinheiten dieselben Wahrscheinlichkeiten für die Restlaufzeit wie ein neues Bauteil.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß für exponentialverteiltes X obige Gleichung gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X > x + y \mid X > y] &= \frac{\mathbb{P}[X > x + y, X > y]}{\mathbb{P}[X > y]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X > x + y]}{\mathbb{P}[X > y]} \qquad \text{da } [X > x + y] \text{ impliziert } [X > y] \text{ wegen } x > 0 \\
&= \frac{1 - \mathbb{P}[X \leq x + y]}{1 - \mathbb{P}[X \leq y]} \\
&= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(x+y)})}{1 - (1 - e^{-\lambda y})} \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+y)})}{e^{-\lambda y})} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}[X > x].
\end{aligned}$$

Gelte nun umgekehrt für alle $x, y > 0$, daß $\mathbb{P}[X > x+y \mid X > y] = \mathbb{P}[X > x]$. Wir zeigen nun, daß dann X exponentialverteilt sein muß.
Sei zunächst $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion von X. Dann gilt für alle $x, y > 0$:

$$\begin{aligned}
1 - F_X(x) &= \mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X > x + y \mid X > y] = \frac{\mathbb{P}[X > x + y, X > y]}{\mathbb{P}[X > y]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X > x + y]}{\mathbb{P}[X > y]} = \frac{1 - F_X(x + y)}{1 - F_X(y)}.
\end{aligned}$$

D.h. mit $G(x) := 1 - F_X(x)$ erhalten wir die Funktionalgleichung

$$G(x) \cdot G(y) = G(x + y),$$

deren Lösungen die Exponentialfunktionen sind, also $G(x) = e^{\lambda x}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt:

- Da $G(0) = 1$, folgt $F_X(0) = 1 - G(0) = 0$, d.h. $X \geq 0$.
- Da die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ nicht konstant ist, kann auch $G(x) = 1 - F_X(x)$ nicht konstant sein, d.h. $\lambda \neq 0$.
- Da die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ monoton wachsend ist, muß $G(x) = 1 - F_X(x)$ monoton fallend sein, d.h. es muß gelten: $\lambda < 0$.

Somit erhalten wir, daß die Verteilungsfunktion von X die Form $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ für $\lambda > 0$ besitzt, also genau die Form der Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariablen. Somit ist X exponentialverteilt.

□

Folie zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse"

Aufgaben zur Poisson- und Exponentialverteilung:

1. Eine Versicherung zahlt Entschädigungen für Hagelschäden. Dabei wird die Anzahl X der Hagelunwetter pro Jahr mit Hilfe einer Poisson-Verteilung modelliert. Im Schnitt kommt es zweimal im Jahr zu einem Hagelunwetter.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Jahr maximal 2 Hagelunwetter auftreten?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in 3 Jahren maximal 5 Hagelunwetter auftreten?
   (c) Es wird ein Zeitraum von 5 Jahren betrachtet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in maximal 2 Jahren mehr als 2 Hagelunwetter auftreten?
   (d) Wie viele Jahre müssen vergehen, damit es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens ein Jahr gab, in welchem mehr als 2 Hagelunwetter auftraten?

2. Eine zufällig ausgewählte CD eines bestimmten Herstellers ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,015$ defekt. Es wird eine Schachtel mit 100 CD's auf die Qualität der CD's überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei defekte CD's in der Schachtel sind? Berechnen Sie einmal das Ergebnis exakt, und einmal mit Hilfe der Approximation durch die Poisson-Verteilung!

3. Die Glühbirnen eines bestimmten Herstellers haben eine durchschnittliche Lebensdauer von 100 Stunden. Man nehme an, daß die Lebensdauer einer zufällig ausgewählten Glühbirne exponential-verteilt sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Glühbirne mindestens 110 Stunden leuchtet?

Aufgaben zur Poisson- und Exponentialverteilung

① $\lambda = 2$ und $X \sim Poi(2)$ und $\mathbb{P}[X = k] = \frac{2^k}{k!} e^{-\lambda}$

a) $\mathbb{P}[X \le 2] = \mathbb{P}[X=0] + \mathbb{P}[X=1] + \mathbb{P}[X=2] =$

$$= e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} = \underline{0{,}6767}$$

b) X = # Unfälle pro Jahr : im Interval $[0,1]$; $X \sim Poi(2)$

Y = # Unfälle in $[0,3]$; $Y \sim Poi(3\cdot 2) = Poi(6)$

$$\mathbb{P}[Y \le 5] = e^{-6} + \frac{6^1}{1!} e^{-6} + \frac{6^2}{2!} e^{-6} + \dots + \frac{6^5}{5!} e^{-6} = \underline{0{,}4458}$$

c) $\mathbb{P}[\text{max } 2 \text{ Jahren} > 2 \text{ Hagelunwetter}] = ?$

$$\mathbb{P}[X > 2] = 1 - \underbrace{\mathbb{P}[X \le 2]}_{a)} = 1 - 0{,}6767 = 0{,}3232$$

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} \underbrace{\mathbb{P}[X > 2]}_{0{,}3232}^{k} \Big(\underbrace{1 - \mathbb{P}[X > 2]}_{0{,}6767}\Big)^{5-k} = 0{,}8045$$

d) $\mathbb{P}[\text{mindestens } 1 \text{ Jahr in } n \text{ Jahren mit mehr als } 2 \text{ Unwetter}] \ge \frac{90}{100}$

$n = ?$

$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}[\text{kein Jahr aus } n \text{ mit mehr als } 2 \text{ Unwetter}] \ge \frac{90}{100}$

X = # Unwetter in $[0,1)$ gleichverteilt mit

Unwetter in $[k-1, k)$, $\forall k = 1, n$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}[X \le 2]^n \ge \frac{90}{100} \Rightarrow \mathbb{P}[X \le 2]^n \le \frac{10}{100} \Rightarrow$$

$$n \log \underbrace{\mathbb{P}[X \le 2]}_{0{,}6767} \le \log \frac{10}{100} \Rightarrow n \ge \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}6767} = 5{,}89 \text{ Jahren}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 6}$$

(2) $p = 0{,}015$

$n = 100$

X = Anzahl defekter CD'S

$X \sim \mathcal{B}(100, 0{,}015)$

$\mathbb{P}[X=k] = \binom{100}{k} (0{,}015)^k (1-0{,}015)^{100-k}$

$\mathbb{P}[X \geq 2] = ?$ [exakt und mit Approx. durch Poisson-verteilung]

$\mathbb{P}[X \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[X=0] - \mathbb{P}[X=1] = 1 - \binom{100}{0}(0{,}015)^0 (1-0{,}015)^{100}$

$- \binom{100}{1}(0{,}015)^1 (1-0{,}015)^{99} = \boxed{0{,}4435}$

<u>Durch Poisson-approximation</u> ($n \geq 30$ und $p \leq \frac{1}{10}$)

Dann $\mathbb{P}[X=k] \approx \mathbb{P}[Y=k]$

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$; $Y \sim Poi(np) = Poi(1{,}5)$

$\mathbb{P}[X \geq 2] = 1 - e^{-1{,}5} - \frac{1{,}5^1}{1!} e^{-1{,}5} = \boxed{0{,}4422}$

(3)

L = Lebensdauer $\sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$

$E[L] = 100 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$

$\mathbb{P}[L \geq 110] = 1 - \mathbb{P}[L < 110] = 1 - \int_{-\infty}^{110} \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx =$

$= 1 - F_L(110) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{110}{100}}\right) = e^{-1{,}1} = \underline{0{,}3329}$