Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2017/2018

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

11. Übungsblatt (16. Jänner 2018)

---

48. Der Zufallsvektor (X, Y) hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion **(2 Pkt.)**

$$\mathbb{P}[X = i, Y = j] = \frac{2}{n(n+1)}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{und } j = 1, \dots, i.$$

Man zeige, dass X und Y nicht unabhängig sind.

49. Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) habe folgende gemeinsame Dichte: **(3 Pkt.)**

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 3x, & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

(b) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y, sowie $\varrho(X, Y)$. Sind X und Y unabhängig?

50. Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) besitzt eine Dichtefunktion folgender Form **(4 Pkt.)**

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot y & \text{falls } 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ \text{und } 0 \le x + y \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c, sodass $f(x, y)$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

(b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

(c) Sind X und Y unabhängig?

(d) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X > Y, X < 3/4]$.

51. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige $\mathsf{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie mit Hilfe der Faltungsformel dass die Dichtefunktion der Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ gegeben ist durch: **(4 Pkt.)**

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & \text{für } t \ge 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Induktion nach n.