

49. (3 Pkt.)

Man betrachte die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors  $(X, Y)$ , wobei  $X$  die Werte 1, 2, 3 annehmen kann und  $Y$  die Werte 1, 2. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = 1, Y = 1] &= 0.1, \quad \mathbb{P}[X = 2, Y = 1] = 0.06, \quad \mathbb{P}[X = 2, Y = 2] = 0.24, \\ \mathbb{P}[X = 1] &= 0.5, \quad \mathbb{P}[Y = 1] = 0.2 \end{aligned}$$

- Stellen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle von  $(X, Y)$  auf.
- Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?
- Bestimmen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten zu  $(X, Y)$ .
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Z = X + Y$ .

50. (1 Pkt.)

Der Zufallsvektor  $(X, Y)$  hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}[X = i, Y = j] = \frac{2}{n(n+1)}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad j = 1, \dots, i.$$

Man zeige, dass  $X$  und  $Y$  nicht unabhängig sind.

51. (3 Pkt.)

Ein zweidimensionaler Zufallsvektor  $(X, Y)$  habe folgende gemeinsame Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot y & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \text{und } 0 \leq x + y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Konstante  $c$ , sodass  $f_{X,Y}(x, y)$  tatsächlich eine Dichtefunktion ist.
- Berechnen Sie die Randdichten von  $X$  und  $Y$ .
- Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?
- Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ .
- Berechnen Sie  $\mathbb{P}[3X < Y]$ .

52. (2 Pkt.)

Ein zweidimensionaler Zufallsvektor  $(X, Y)$  hat die Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2y} & \text{falls } 1 \leq x < \infty, \quad \frac{1}{x} \leq y \leq x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie lauten die Randdichten von  $X$  und  $Y$ ?

53. (2 Pkt.)

Ein zweidimensionaler Zufallsvektor  $(X, Y)$  hat die Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{k^2} & \text{falls } 0 \leq x \leq y \leq k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $k$  eine Konstante ist.

- Man zeige, dass  $f_{X,Y}(x, y)$  tatsächlich eine Dichtefunktion darstellt.
- Wie lauten die Randdichte  $f_X(x)$  und  $\mathbb{E}[X]$ ?
- Man berechne  $\mathbb{P}[X \leq \frac{k}{2}]$  und  $\mathbb{P}[X \leq \frac{k}{2}, Y \geq \frac{3k}{4}]$ .