Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2018/2019

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

11. Übungsblatt; 8. Jänner 2019

---

54. **Prüfungsbeispiel 16. Mai 2018 (4 Pkt.)**
Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) besitzt eine Dichtefunktion folgender Form

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-2x-y} & , \quad \text{für } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante k, sodass $f(x, y)$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.
(b) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.
(c) Sind X und Y unabhängig?
(d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $Cov(X, Y)$.
(e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 2,\ 0 \leq Y \leq 3]$.

55. **Prüfungsbeispiel 21. März 2018 (4 Pkt.)**
Man betrachte 2 Würfel: der erste Würfel hat auf seinen sechs Seiten die Augenzahlen $1, 1, 2, 3, 3, 4$; der zweite Würfel hat auf seinen sechs Seiten die Augenzahlen $1, 2, 2, 2, 3, 3$. Es werden beide Würfel einmal geworfen. Sei X die resultierende Augenzahl des ersten Würfels und Y die resultierende Augenzahl des zweiten Würfels.

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle des Zufallsvektors (X, Y).
(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfuntkion von $Z = X + Y$.
(c) Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von Z.
(d) Es wird folgendes Spiel gespielt: falls Z kleiner oder gleich drei ist, verliert der Spieler 3 Euro; falls Z gleich 4 ist, gewinnt der Spieler 2 Euro; in allen anderen Fälle gewinnt der Spieler 1 Euro. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler? Sei T die Auszahlung nach einem Spiel (Verlust=negative Auszahlung). Berechnen Sie die erwartete Auszahlung.

56. **(2 Pkt.)**
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige $\mathsf{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie mit Hilfe der Faltungsformel dass die Dichtefunktion der Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ gegeben ist durch:

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Induktion nach n.

57. **(2 Pkt.)**
Die Anzahl der Fahrzeuge die eine Fabrik in einem Tag produziert ist eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 50 und Varianz 25.

(a) Verwenden Sie die Markov-Ungleichung um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass in einem Tag mehr als 75 Fahrzeuge produziert werden.
(b) Verwenden Sie die Tschebyschev-Ungleichung um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass die Anzahl der an einem Tag produzierten Fahrzeuge zwischen 40 und 60 liegt.

58. **(2 Pkt.)**
Ein Professor muss 50 Prüfungen benoten. Aus langjähriger Erfahrung weiss er dass er zur Benotung einer Prüfung im Mittel 10 Minuten benötigt. Die Standardabweichung beträgt 4 Minuten. Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen dass der Professor in einem Arbeitstag (8 Stunden) mit dem benoten von allen Prüfungen fertig wird.