Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2018/2019

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

13. Übungsblatt; 22. Jänner 2019

---

64. **Prüfungsbeispiel 8. Februar 2017 (6 Pkt.)**
Eine weiße und zwei schwarze Kugeln sind zufällig in einer Reihe nebeneinander angeordnet. Die Anordnung der Kugeln ändert sich in jeder Spielrunde nach folgender Regel:

- Eine der drei Kugeln wird zufällig ausgewählt, wobei die weiße Kugel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewählt wird und jede der zwei schwarzen Kugeln mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ ausgewählt wird.
- Die ausgewählte Kugel wird an Position 1 (ganz links) neu angeordnet, die übrigen Kugeln rücken nach rechts, ihre relative Anordnung bleibt aber unverändert.

Modellieren sie das beschriebene Spiel als homogene Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(a) Bestimmen Sie den Zustandsraum der Markovkette.
(b) Geben Sie die Übergangsmatrix und den Übergangsgraphen von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.
(c) Bestimmen Sie die Perioden aller Zustände der Markovkette.
(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dass die weisse Kugel in 3 Schritten von Position 1 (ganz links) zur Position 3 (ganz rechts) wandert.
(e) Bestimmen Sie die Grenzverteilung der Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
(f) Wieviele Schritte braucht die weiße Kugel im Durchschnitt um an die 3. Position (ganz rechts) zurückzukehren.

65. **Prüfungsbeispiel 6. Oktober 2016 (4 Pkt.)**
Eine homogene Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{a, b, c\}$ hat die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p(a,a) = p(a,c) = \frac{1}{2}, \quad p(a,b) = 0$$
$$p(b,a) = p(b,c) = \frac{2}{5}, \quad p(b,b) = \frac{1}{5}$$
$$p(c,a) = 0, \quad p(c,b) = \frac{2}{5}, \quad p(c,c) = \frac{3}{5}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und bestimmen Sie die vollständige Übergangsmatrix.
(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_3 = a | X_0 = c]$.
(c) Die Anfangsverteilung sei gegeben durch $\mathbb{P}[X_0 = a] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[X_0 = b] = \frac{2}{3}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_3 = a]$.
(d) Überprüfen Sie die Markovkette auf Irreduzibilität und Rekurrenz. Begründen Sie Ihre Antwort!

66. **(3 Pkt.)**
Man betrachte die homogene Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Grenzverteilung der Markovkette.
(b) Bestimmen Sie die erwarteten Rückkehrzeiten m_i zu jedem Zustand $i \in \mathcal{Z}$.