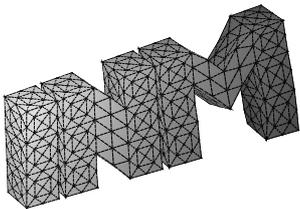

Partielle Differentialgleichungen und Numerik

O. Steinbach



**Berichte aus dem
Institut für Numerische Mathematik**

Technische Universität Graz

Partielle Differentialgleichungen und Numerik

O. Steinbach

**Berichte aus dem
Institut für Numerische Mathematik**

Vorlesungsskript 2014/5

Technische Universität Graz
Institut für Numerische Mathematik
Steyrergasse 30
A 8010 Graz

WWW: <http://www.numerik.math.tu-graz.at>

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen	10
2.1	Elementar integrierbare Differentialgleichungen	10
2.2	Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung	17
2.3	Einschrittverfahren	19
2.4	A-Stabilität	28
2.5	Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	30
2.6	Mehrschrittverfahren	33
2.7	Aufgaben	38
3	Zweipunkt–Randwertprobleme	42
3.1	Greensche Funktionen	43
3.2	Finite Differenzen Methode	47
3.3	Finite Element Methode	54
3.4	Aufgaben	62
4	Anfangs–Randwertprobleme	70
5	Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	74
5.1	Aufgaben	86
6	Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	90
6.1	Poisson–Formel	90
6.2	Darstellungsformeln	98
6.3	Abschließende Bemerkungen	105
6.4	Aufgaben	108

Kapitel 1

Einleitung

Die mathematische Beschreibung von in Raum und Zeit ablaufenden Prozessen, wie zum Beispiel die Beschreibung von

- Fließ- und Transportvorgängen (z.B. Umströmung eines Flugzeugs),
- Diffusionsvorgängen (z.B. Ausbreitung eines Schadstoffes im Erdreich bzw. Wirkung eines auf der Haut aufgetragenen Medikaments),
- Verformungen (z.B. Belastung eines Bauteils aufgrund von äußeren oder thermischen bzw. elektromagnetischen Kräften),
- Wellenausbreitungen (z.B. akustische Wellen, Modellierung eines Tsunamis),
- Reaktionsgleichungen (z.B. chemische Reaktionen, Verbrennung)

führt auf Systeme von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. In diesen Gleichungen treten unbekannte Funktionen von einer oder mehrerer Veränderlichen auf, zum Beispiel von Zeit t und Ort x , sowie deren (partiellen) Ableitungen. Diese Funktionen beschreiben zum Beispiel die Strömungsgeschwindigkeit und den Druck, die Verformungen und die Spannungen, die Temperatur oder die Konzentration eines Stoffes bzw. einer Spezies.

Im Falle einer Veränderlichen $t \in \mathbb{R}$ lautet die allgemeine Form einer implizit gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m)}(t)) = 0. \quad (1.1)$$

Hierbei ist $F(\cdot)$ eine gegebene Funktion, $y(t)$ ist die gesuchte Lösung, und die höchste auftretende Ableitung bestimmt die Ordnung m der Differentialgleichung. Ist $F(\cdot)$ linear in der gesuchten Funktion $y(t)$ und all ihren Ableitungen, so sprechen wir von einer linearen Differentialgleichung, andernfalls liegt eine nichtlineare Differentialgleichung vor.

Beispiel 1.1 Als Beispiel für eine implizit gegebene Differentialgleichung erster Ordnung betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'(t)y(t) + t = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Offenbar ist hier

$$F(t, y(t), y'(t)) = y'(t)y(t) + t$$

nichtlinear in $y(t)$ und $y'(t)$.

Kann die Differentialgleichung (1.1) nach der höchsten auftretenden Ableitung $y^{(m)}(t)$ aufgelöst werden, so ergibt sich die explizit gegebene Differentialgleichung

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)). \quad (1.3)$$

Beispiel 1.2 Für die implizit gegebene Differentialgleichung (1.2) folgt für $y(t) \neq 0$ die explizite Darstellung

$$y'(t) = -\frac{t}{y(t)} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

mit

$$f(t, y(t)) = -\frac{t}{y(t)}.$$

Durch die Transformationen

$$\begin{aligned} w_0(t) &= y(t), \\ w_1(t) &= y'(t) &= w'_0(t), \\ w_2(t) &= y''(t) &= w'_1(t), \\ &\vdots &\vdots \\ w_{m-1}(t) &= y^{(m-1)}(t) &= w'_{m-2}(t) \end{aligned}$$

kann die explizit gegebene Differentialgleichung (1.3) der Ordnung m auf ein System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung der m unbekanntenen Funktionen $w_0(t), \dots, w_{m-1}(t)$ zurückgeführt werden,

$$\begin{aligned} w'_0(t) &= w_1(t), \\ &\vdots \\ w'_{m-2}(t) &= w_{m-1}(t), \\ w'_{m-1}(t) &= f(t, w_0(t), \dots, w_{m-1}(t)). \end{aligned}$$

Beispiel 1.3 Für die explizit gegebene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) + t u'(t) + t^2 u(t) = g(t)$$

ergibt sich mit der Transformation

$$v(t) = u'(t)$$

ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$v'(t) = g(t) - t v(t) - t^2 u(t), \quad u'(t) = v(t).$$

In dieser Vorlesung beschränken wir uns auf skalare gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)). \quad (1.5)$$

Gesucht ist also eine stetig differenzierbare Funktion $y(t)$, welche für eine gegebene Funktion $f(t, y)$ die Differentialgleichung (1.5) erfüllt.

Beispiel 1.4 *Als ein einführendes Beispiel betrachten wir ein Populationsmodell für die Evolution einer Spezies. Bezeichnen $p(t)$ die Population zur Zeit t und $r(t, p)$ die Differenz zwischen Geburts- und Sterberate pro Individuum in einem isolierten System, welches nicht durch äußere Einflüsse gestört wird, dann gilt die sogenannte Wachstumsgleichung*

$$p'(t) = r(t, p(t))p(t).$$

Für die Wachstumsrate $r(t, p)$ können nun verschiedene Modellannahmen getroffen werden. Im Modell von Malthus (1798) wird eine konstante Wachstumsrate $r(t, p) = a$ angenommen, zu lösen ist also die Differentialgleichung

$$p'(t) = ap(t).$$

Da die Population $p(t)$ als eine positive Funktion $p(t) > 0$ angenommen werden kann, ergibt die Division durch $p(t)$ und Integration von einem Anfangszeitpunkt T_0 bis zur Zeit T

$$\int_{T_0}^T \frac{p'(t)}{p(t)} dt = \int_{T_0}^T a dt = a(T - T_0).$$

Mit den Transformationen

$$z = p(t), \quad dz = p'(t)dt$$

ergibt sich weiters

$$a(T - T_0) = \int_{T_0}^T \frac{p'(t)}{p(t)} dt = \int_{p(T_0)}^{p(T)} \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{p(T_0)}^{p(T)} = \ln \frac{p(T)}{p(T_0)},$$

wobei wir einen Anfangszustand $p(T_0)$ voraussetzen wollen. Die Lösung der Differentialgleichung zu einer beliebigen Zeit $T > T_0$ ist also gegeben durch

$$p(T) = p(T_0)e^{a(T-T_0)}.$$

Wie wir in Beispiel 1.4 gesehen haben, wird erst durch die Vorgabe eines Anfangszustandes zur Zeit T_0 die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung eindeutig beschrieben. Das zugehörige Anfangswertproblem der Differentialgleichung (1.5) lautet dann: Gesucht ist eine stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ als Lösung von

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.6)$$

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form (1.6) wird das Argument $t \in \mathbb{R}$ der gesuchten Funktionen $y(t)$ oft als Zeit interpretiert, d.h. es werden zeitliche Änderungen eines Zustands $y(t)$ untersucht.

Betrachtet man jedoch eine skalare Funktion $u(x)$ in Abhängigkeit einer Ortsvariablen $x \in \mathbb{R}^d$ mit der Raumdimension $d = 1, 2, 3$, zum Beispiel die Temperatur oder den Druck, so können die partiellen Ableitungen von $u(x)$ geschrieben werden als

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} u(x).$$

Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ein Multiindex mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ und mit dem Betrag

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d.$$

Beispiel 1.5 Für $d = 2$ sind alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ gegeben durch

$$\alpha = (2, 0), \quad \alpha = (1, 1), \quad \alpha = (0, 2).$$

Damit kann man zum Beispiel einen Differentialoperator der Form

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha u(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x)$$

beschreiben.

Die allgemeine Form einer implizit gegebenen partiellen Differentialgleichung lautet dann

$$F(x, u(x), Du(x), \dots, D^\alpha u(x)) = 0. \quad (1.7)$$

Dabei ist $F(\cdot)$ wieder eine gegebene Funktion, $u(x)$ ist die gesuchte Lösung, und die höchste auftretende Ableitung $m = |\alpha|$ beschreibt die Ordnung der partiellen Differentialgleichung.

Beispiel 1.6 Das einfachste Beispiel einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right] = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d. \quad (1.8)$$

Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein vorgegebenes beschränktes Gebiet, $a_{ji}(x)$ sind i.a. richtungs- und ortsabhängige Wärmeleitkoeffizienten, und $f(x)$ beschreibt vorgegebene Quellen und Senken. Man beachte, daß die Wärmeleitkoeffizienten a_{ji} auch von der Temperatur u abhängen können, d.h.

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ji}(x, u(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right] = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

stellt eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

Für

$$a_{ji}(x) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

erhalten wir aus (1.8) die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (1.9)$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.10)$$

Insbesondere für eine Raumdimension $d = 1$ und ein offenes Intervall $\Omega = (a, b)$ ist $u(x)$ Lösung der linearen Differentialgleichung

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (a, b). \quad (1.11)$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (1.11) ist gegeben durch

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x),$$

wobei u_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$-u_p''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (a, b)$$

ist, und $u_h(x)$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$-u_h''(x) = 0 \quad \text{für } x \in (a, b).$$

Insbesondere ist

$$u_h(x) = c_0 + c_1 x, \quad u(x) = u_p(x) + c_0 + c_1 x. \quad (1.12)$$

Zur Bestimmung der zunächst frei wählbaren Konstanten c_0 und c_1 in (1.12) sind zusätzliche Bedingungen an die Lösung $u(x)$ in den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ zu stellen, zum Beispiel beschreiben die Dirichlet-Randbedingungen

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b$$

vorgegebene Werte der gesuchten Funktion, zum Beispiel die Temperatur. Die Konstanten c_0 und c_1 ergeben sich dann als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$u_p(a) + c_0 + c_1 a = u_a, \quad u_p(b) + c_0 + c_1 b = u_b,$$

d.h.

$$c_1 = \frac{1}{b-a} [u_b - u_a - u_p(b) + u_p(a)], \quad c_0 = \frac{1}{b-a} [bu_a - au_b - bu_p(a) + au_p(b)].$$

Alternativ kann in den Randpunkten auch der Fluß durch eine Neumann–Randbedingung

$$u'(a) = g_a, \quad u'(b) = g_b$$

vorgegeben werden. Das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (a, b), \quad u'(a) = g_a, \quad u'(b) = g_b$$

ist aber nicht eindeutig lösbar, sofern überhaupt eine Lösung existiert. Für die Bestimmung der Konstanten ergibt sich nämlich

$$u'_p(a) + c_1 = g_a, \quad u'_p(b) + c_1 = g_b$$

und somit

$$c_1 = g_a - u'_p(a) \quad \text{bzw.} \quad c_1 = g_b - u'_p(b).$$

Für die Existenz einer Lösung müssen die gegebenen Daten f und somit u_p sowie g_a und g_b der Lösbarkeitsbedingung

$$g_a - u'_p(a) = g_b - u'_p(b)$$

genügen, welche das globale Gleichgewicht beschreibt. Andererseits ist die Konstante c_0 frei wählbar, so daß die Lösung nicht eindeutig ist.

Für die Modellierung von zeit- und ortsabhängigen Prozessen sind partielle Ableitungen sowohl nach der Zeitvariablen $t \in \mathbb{R}$ als auch nach der Ortsvariablen $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ zu berücksichtigen. Als Beispiel betrachten wir die instationäre Wärmeleitungsgleichung zur Bestimmung einer unbekanntenen Funktion $u(t, x)$, zum Beispiel einer Temperaturverteilung, so daß

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ji}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(t, x) \right] = f(t, x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, t > t_0. \quad (1.13)$$

Für eine Raumdimension $d = 1$ und $\Omega = (a, b)$ ist $u(t, x)$ Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für } x \in (a, b), t > t_0,$$

welche durch geeignete Anfangs- und Randbedingungen zu vervollständigen ist, zum Beispiel

$$u(t, a) = u_a(t), \quad u(t, b) = u_b(t) \quad \text{für } t > t_0, \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in (a, b).$$

Als Beispiel einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung betrachten wir abschließend eine Transportgleichung zur Bestimmung einer unbekanntenen Funktion $u(t, x)$, zum Beispiel einer Konzentration, so daß

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(u(t, x)) = f(t, x) \quad \text{für } t > t_0, x \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(t_0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

In (1.14) ist $F(u)$ eine gegebene Funktion, zum Beispiel erhalten wir für

$$F(u) = \frac{1}{2}u^2$$

die Burgers–Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) = f(t, x),$$

eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit analytischen und numerischen Verfahren zur Lösung von Anfangs-, Randwert-, und Anfangsrandwertaufgaben gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, wie diese in dieser Einleitung beispielhaft dargestellt sind.

Kapitel 2

Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Betrachtet wird ein Anfangswertproblem zur Bestimmung einer stetig differenzierbaren Funktion $y(t)$, so daß

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.1)$$

Je nach Gestalt der gegebenen skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist es möglich, eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1) in geschlossener Form anzugeben, siehe zum Beispiel [5].

2.1 Elementar integrierbare Differentialgleichungen

Im folgenden sollen einige der einfachsten und wichtigsten Typen elementar integrierbarer Differentialgleichungen erster Ordnung behandelt werden, siehe zum Beispiel auch [9].

Für

$$f(t, y) = g(t)$$

ergibt sich für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = g(t) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.2)$$

durch Integration

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t g(s) ds. \quad (2.3)$$

Für

$$f(t, y) = h(y)$$

lautet das Anfangswertproblem (2.1)

$$y'(t) = h(y(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.4)$$

Für $h(y(t)) \neq 0$ führt Division durch $h(y(t))$ auf

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = 1 \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Anschliessende Integration, dabei ersetzen wir die Integrationsvariable t durch $s \in (t_0, t)$, ergibt

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds = \int_{t_0}^t ds = t - t_0.$$

Mit den Transformationen

$$z = y(s), \quad dz = y'(s)ds$$

folgt

$$t - t_0 = \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dz}{h(z)} = \bar{H}(y(t)) - \bar{H}(y(t_0))$$

mit der Stammfunktion

$$\bar{H}(z) = \int \frac{dz}{h(z)}.$$

Damit ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems (2.4) als die durch

$$\bar{H}(y(t)) = t - t_0 + \bar{H}(y_0) \tag{2.5}$$

implizit gegebene Funktion $y(t)$.

Beispiel 2.1 *Betrachtet wird das Anfangswertproblem*

$$y'(t) = \sqrt{y(t)} \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = 0.$$

Dabei wird $y(t) > 0$ für $t > t_0$ vorausgesetzt. Dann ist

$$\bar{H}(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}, \quad \bar{H}(y(t)) = 2\sqrt{y(t)}, \quad \bar{H}(y(t_0)) = 0.$$

Zu lösen bleibt (2.5),

$$2\sqrt{y(t)} = t - t_0.$$

Daraus folgt

$$y(t) = \left(\frac{t - t_0}{2} \right)^2.$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereichs erhalten wir durch Differentiation

$$0 \leq \sqrt{y(t)} = y'(t) = \frac{t - t_0}{2} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Für $t < t_0$ ist die Lösung gegeben durch $y(t) = 0$.

Die beiden bisher behandelten Differentialgleichungen (2.2) und (2.4) sind Spezialfälle des Anfangswertproblems

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.6)$$

mit

$$f(t, y) = g(t)h(y).$$

Die Trennung der Veränderlichen und Integration ergibt dann

$$\overline{H}(y(t)) - \overline{H}(y_0) = \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dz}{h(z)} = \int_{t_0}^t g(s)ds,$$

d.h. die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems (2.6) ist implizit gegeben als Lösung der Gleichung

$$\overline{H}(y(t)) = \overline{H}(y_0) + \int_{t_0}^t g(s)ds. \quad (2.7)$$

Insbesondere für

$$h(y) = -y$$

ist (2.6) eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung,

$$y'(t) + g(t)y(t) = 0 \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.8)$$

Nach (2.7) ist die Lösung des Anfangswertproblems (2.8) implizit gegeben als Lösung von

$$\ln |y(t)| = \ln |y_0| - \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

Somit ist

$$y(t) = y_0 \exp \left(- \int_{t_0}^t g(s)ds \right). \quad (2.9)$$

Beispiel 2.2 Für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) + y(t) = 0 \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0$$

ergibt sich

$$y(t) = y_0 e^{-(t-t_0)}.$$

Der in der Differentialgleichung (2.8) auftretende Differentialoperator

$$L[y](t) := y'(t) + g(t)y(t)$$

ist linear, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} L[y_1 + y_2](t) &= [y_1(t) + y_2(t)]' + g(t)[y_1(t) + y_2(t)] \\ &= y_1'(t) + g(t)y_1(t) + y_2'(t) + g(t)y_2(t) = L[y_1](t) + L[y_2](t). \end{aligned}$$

Damit kann die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(t) + g(t)y(t) = f(t) \quad (2.10)$$

beschrieben werden durch den Ansatz

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Dabei ist y_h eine allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'_h(t) + g(t)y_h(t) = 0,$$

und y_p ist eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'_p(t) + g(t)y_p(t) = f(t).$$

Je nach Gestalt der gegebenen Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ kann eine partikuläre Lösung durch einen entsprechenden Ansatz zum Beispiel durch Polynome oder trigonometrische Funktionen bestimmt werden.

Beispiel 2.3 Für die Differentialgleichung

$$y'(t) + y(t) = \sin t$$

führt der Ansatz

$$y(t) = A \sin t + B \cos t, \quad y'(t) = A \cos t - B \sin t$$

auf

$$y'(t) + y(t) = (A + B) \cos t + (A - B) \sin t = \sin t.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$A + B = 0, \quad A - B = 1,$$

d.h.

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2},$$

und somit folgt die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = \frac{1}{2} [\sin t - \cos t],$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'_h(t) + y_h(t) = 0$$

ist durch

$$y_h(t) = C e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R},$$

gegeben, und somit folgt für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(t) = C e^{-t} + \frac{1}{2} [\sin t - \cos t],$$

wobei sich die Konstante C aus der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ bestimmen läßt.

Alternativ kann eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch eine Variation der Konstanten bestimmt werden. Sei y_h eine bekannte Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dann führt der Ansatz

$$y_p(t) = C(t)y_h(t)$$

mit

$$y_p'(t) + g(t)y_p(t) = C'(t)y_h(t) + C(t)[y_h'(t) + g(t)y_h(t)] = C'(t)y_h(t)$$

auf die elementar zu lösende Differentialgleichung

$$C'(t)y_h(t) = f(t). \quad (2.11)$$

Beispiel 2.4 Für die Differentialgleichung

$$y'(t) + y(t) = \sin t$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h'(t) + y_h(t) = 0$$

durch

$$y_h(t) = C e^{-t}$$

gegeben. Für die Bestimmung einer partikulären Lösung führt der Ansatz

$$y_p(t) = C(t)e^{-t}$$

auf die Differentialgleichung

$$C'(t)e^{-t} = \sin t.$$

Durch zweimalige partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} C(t) &= \int e^t \sin t \, dt \\ &= e^t \sin t - \int e^t \cos t \, dt \\ &= e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t \, dt \end{aligned}$$

und somit

$$C(t) = \int e^t \sin t \, dt = \frac{1}{2}e^t [\sin t - \cos t],$$

d.h.

$$y_p(t) = C(t)e^{-t} = \frac{1}{2}[\sin t - \cos t].$$

Im folgenden betrachten wir Differentialgleichungen, welche sich durch geeignete Transformationen auf die bereits behandelten Fälle zurückführen lassen.

Die nichtlineare Bernoullische Differentialgleichung

$$y'(t) + g(t)y(t) + h(t)[y(t)]^\alpha = 0 \quad (2.12)$$

kann für $\alpha \neq 1$ durch die Transformation

$$u(t) = [y(t)]^{1-\alpha}, \quad u'(t) = (1-\alpha)[y(t)]^{-\alpha}y'(t)$$

in die lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-\alpha}u'(t) + g(t)u(t) + h(t) = 0$$

überführt werden. Die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y'(t) + g(t)y(t) + h(t)[y(t)]^2 = f(t) \quad (2.13)$$

kann durch Kenntnis einer partikulären Lösung y_p durch den Ansatz

$$y(t) = z(t) + y_p(t), \quad y'_p(t) + g(t)y_p(t) + h(t)[y_p(t)]^2 = f(t)$$

auf eine Bernoullische Differentialgleichung der Form

$$z'(t) + [g(t) + 2h(t)y_p(t)]z(t) + h(t)[z(t)]^2 = 0$$

zurückgeführt werden.

Als homogene Differentialgleichungen werden Differentialgleichungen der Gestalt

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \quad (2.14)$$

bezeichnet. Mit den Transformationen

$$y(t) = tu(t), \quad y'(t) = u(t) + tu'(t)$$

ergibt sich aus (2.14) die Differentialgleichung

$$u'(t) = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t},$$

welche durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann.

Abschließend betrachten wir noch lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t). \quad (2.15)$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

dabei ist y_p wieder eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, und y_h ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h''(t) + p(t)y_h'(t) + q(t)y_h(t) = 0.$$

In Abhängigkeit der gegebenen Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ kann die allgemeine Lösung $y_h(t)$ der homogenen Differentialgleichung durch einen geeigneten Ansatz bestimmt werden.

Beispiel 2.5 Für die Differentialgleichung

$$u''(x) + \alpha^2 u(x) = 0$$

führt der Ansatz

$$u(x) = e^{\lambda x}$$

durch Einsetzen auf

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \alpha^2 e^{\lambda x} = 0, \quad \lambda^2 + \alpha^2 = 0, \quad \lambda = \pm \alpha i.$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} u_h(x) &= c_1 e^{\alpha i x} + c_2 e^{-\alpha i x} = c_1 [\cos \alpha x + i \sin \alpha x] + c_2 [\cos \alpha x - i \sin \alpha x] \\ &= [c_1 + c_2] \cos \alpha x + i[c_1 - c_2] \sin \alpha x = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \end{aligned}$$

mit

$$A = c_1 + c_2, \quad B = i[c_1 - c_2].$$

Beispiel 2.6 Für die Differentialgleichung

$$x^2 u''(x) + x u'(x) = \alpha u(x)$$

mit $\alpha > 0$ führt der Ansatz

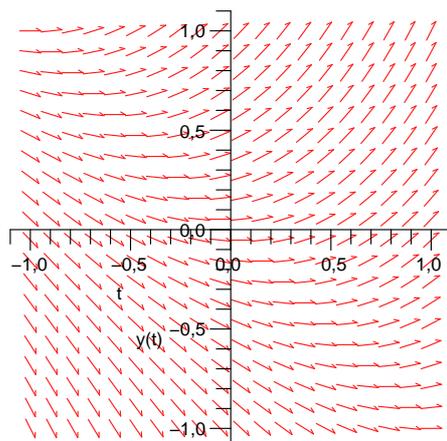
$$u(x) = x^\beta, \quad u'(x) = \beta x^{\beta-1}, \quad u''(x) = \beta(\beta-1)x^{\beta-2}$$

durch Einsetzen auf

$$\beta(\beta-1)x^\beta + \beta x^\beta = \alpha x^\beta, \quad \beta^2 = \alpha.$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$u(x) = c_1 x^{\sqrt{\alpha}} + c_2 x^{-\sqrt{\alpha}}.$$

Abbildung 2.1: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(t) = y(t) + t$.

2.2 Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung

Betrachtet wird das Anfangswertproblem (1.6) einer explizit gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung,

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.16)$$

Durch die Differentialgleichung (2.16) wird jedem Punkt (t, y) durch die Funktion $f(t, y)$ der Anstieg der Lösung $y(t)$ in t zugeordnet. Der Verlauf der allgemeinen Lösung kann also durch das Richtungsfeld $(1, f(t, y))$ graphisch veranschaulicht werden, siehe Abbildung 2.1. Die Integration der Differentialgleichung (2.16) ergibt

$$\int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

und unter Verwendung der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ folgt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (2.17)$$

Die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems (2.16) genügt also der Integralgleichung (2.17), welche als Fixpunktgleichung

$$y(t) = \Phi[y](t) \quad (2.18)$$

interpretiert werden kann. Dabei ist

$$\Phi[y](t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Die Fixpunktgleichung (2.18) und somit auch die Integralgleichung (2.17) kann durch die Methode der sukzessiven Approximation

$$y_{k+1}(t) := \Phi[y_k](t) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0(t) := y_0 \quad (2.19)$$

gelöst werden. Im Fall der Integralgleichung (2.17) führt dies auf das Verfahren von Picard–Lindelöf,

$$y_{k+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_k(s)) ds \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0(t) := y_0. \quad (2.20)$$

Hinreichend für die Konvergenz der Methode der sukzessiven Approximation (2.19) ist die Kontraktionseigenschaft

$$\|\Phi[u] - \Phi[v]\| \leq q \|u - v\| \quad (2.21)$$

für alle Funktionen $u(\cdot)$ und $v(\cdot)$ mit einer positiven Konstanten $q < 1$. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ eine geeignet gewählte Norm im Raum der stetigen Funktionen, siehe zum Beispiel [10, Satz 7.86]. Hinreichend für den Nachweis der Kontraktionseigenschaft (2.21) ist die Voraussetzung der Lipschitz–Stetigkeit der Funktion $f(t, y)$, d.h.

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]; \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Beispiel 2.7 Für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t + y(t) \quad \text{für } t > 0, \quad y(0) = 0,$$

ist $f(t, y) = t + y$ und wegen

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |(t + y_1) - (t + y_2)| = |y_1 - y_2|$$

folgt die Lipschitz–Stetigkeit (2.22) mit $L = 1$. Für die Iterationsvorschrift des Verfahrens von Picard–Lindelöf (2.20) ergibt sich

$$y_0(t) := 0, \quad y_{k+1}(t) = \int_0^t [s + y_k(s)] ds := \frac{1}{2}t^2 + \int_0^t y_k(s) ds \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

und somit

$$y_1(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad y_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3, \quad y_3(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4.$$

Durch vollständige Induktion folgt

$$y_k(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots + \frac{1}{(k+1)!}t^{k+1} = \sum_{j=2}^{k+1} \frac{1}{j!}t^j.$$

Für den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{k+1} \frac{1}{j!}t^j = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!}t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}t^j - t - 1 = e^t - t - 1,$$

und somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = e^t - t - 1.$$

Zur Probe ist

$$y'(t) = e^t - 1 = y(t) + t, \quad y(0) = e^0 - 1 = 0.$$

2.3 Einschrittverfahren

Zur näherungsweise Lösung des Anfangswertproblems (2.16) sollen nun numerische Verfahren hergeleitet und analysiert werden. Insbesondere zu bestimmen ist die Lösung $y(T)$ zu einem Zeitpunkt $t = T$.

Für $n \in \mathbb{N}$ seien durch

$$t_k = t_0 + k h \quad \text{für } k = 0, \dots, n, \quad h = \frac{T - t_0}{n}$$

$n + 1$ gleichmässig verteilte Stützstellen t_k mit einer konstanten Schrittweite h gegeben. Es ist zu bemerken, daß alle in der Folge beschriebenen Verfahren auch auf nicht gleichmässig verteilte Stützstellen übertragen werden können.

Die Integration der Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ für $t \in (t_k, t_{k+1})$ ergibt

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (2.23)$$

Die Herleitung numerischer Näherungsverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems (2.16) beruht nun auf der Verwendung geeigneter numerischer Approximationen des Integrals in (2.23). Mit der linksseitigen Rechteckregel

$$\int_a^b g(t) dt \approx (b - a) g(a) \quad (2.24)$$

folgt aus (2.23)

$$\tilde{y}_{k+1} = y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)), \quad (2.25)$$

wobei die numerische Approximation des Integrals eine Approximation \tilde{y}_{k+1} von $y(t_{k+1})$ ergibt. Werden nun für $k \geq 1$ die unbekanntenen Lösungswerte $y(t_k)$ durch bereits berechnete Näherungswerte y_k ersetzt, so ergibt sich das vorwärtige Eulersche Polygonzugverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k) \quad \text{für } k = 0, \dots, n - 1. \quad (2.26)$$

Da aus der Kenntnis der vorherigen Näherungslösung y_k die neue Näherungslösung y_{k+1} allein durch Auswertung der rechten Seite in (2.26) gewonnen werden kann, liegt mit der Rekursionsvorschrift (2.26) ein explizites Verfahren vor.

Für die Abschätzung des Fehlers

$$e_{k+1} := |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \quad (2.27)$$

ist mit der Dreiecksungleichung zunächst

$$e_{k+1} = |y(t_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1} + \tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}| \leq |y(t_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1}| + |\tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}|. \quad (2.28)$$

Der erste Summand $|y(t_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1}|$ spiegelt dabei den Integrationsfehler beim Übergang von (2.23) zu (2.25) wieder; der zweite Summand $|\tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}|$ beschreibt den Fehler

durch Ersetzen der Eingangsdaten, d.h. den Übergang von (2.25) zu (2.26). Dies entspricht der Stabilität des numerischen Verfahrens. Beide Summanden werden im folgenden abgeschätzt.

Sei die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems (2.16) wenigstens zweimal stetig differenzierbar. Dann ergibt eine Taylorentwicklung der Lösung $y(t_{k+1})$ in Bezug auf den Entwicklungspunkt t_k die Darstellung

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h y'(t_k) + \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_k)$$

mit einer geeigneten Zwischenwertstelle $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$. Mit

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$$

und (2.25) folgt daraus

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)) + \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_k) = \tilde{y}_{k+1} + \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_k).$$

Für die Abschätzung des ersten Summanden $|y(t_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1}|$ gilt somit

$$|y(t_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1}| = \frac{1}{2} h^2 |y''(\xi_k)| \leq h^2 c_K \quad (2.29)$$

mit der Konstanten

$$c_K = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0, T]} |y''(t)|.$$

Zur Abschätzung des zweiten Summanden $|\tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}|$ folgt aus (2.25) und (2.26) und mit der Lipschitz–Stetigkeit (2.22) der Funktion $f(t, y)$

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}| &= \left| [y(t_k) + h f(t_k, y(t_k))] - [y_k + h f(t_k, y_k)] \right| \\ &\leq |y(t_k) - y_k| + h |f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)| \\ &\leq |y(t_k) - y_k| + hL |y(t_k) - y_k| \\ &= (1 + hL) e_k. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus (2.28) die rekursive Fehlerabschätzung

$$e_{k+1} \leq h^2 c_K + (1 + hL) e_k$$

mit dem Anfangsfehler

$$e_0 = |y(t_0) - y_0| = 0.$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich dann

$$e_{k+1} \leq c_K h^2 \sum_{\ell=0}^k (1 + hL)^\ell \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1.$$

Mit

$$\sum_{\ell=0}^k (1+hL)^\ell = \frac{(1+hL)^{k+1} - 1}{hL} \leq \frac{1}{hL} (1+hL)^{k+1}$$

folgt

$$e_{k+1} \leq \frac{c_K}{L} h (1+hL)^{k+1}.$$

Insbesondere für $k+1 = n$ ist

$$|y(T) - y_n| \leq \frac{c_K}{L} h \left(1 + \frac{T-t_0}{n} L\right)^n.$$

Mit der Abschätzung, siehe zum Beispiel [8, Definition 30],

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e \quad \text{für } x > 0$$

ergibt sich schließlich die folgende Fehlerabschätzung.

Satz 2.1 Sei $y(t)$ in $[t_0, T]$ die zweimal stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0$$

mit

$$c_K = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0, T]} |y''(t)|.$$

Weiterhin sei $f(t, y)$ Lipschitz-stetig in y , d.h. es gelte

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } t \in [t_0, T], \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die Näherungslösung y_n des expliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k) \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1$$

mit der Schrittweite $h = (T - t_0)/n$ und den Stützstellen $t_k = t_0 + kh$ für $k = 0, 1, \dots, n$ gilt die Fehlerabschätzung

$$|y(T) - y_n| \leq \frac{c_K}{L} \frac{T - t_0}{n} e^{L(T-t_0)}. \quad (2.30)$$

Wegen (2.30) besitzt das explizite Eulersche Polygonzugverfahren (2.26) ein lineares Konvergenzverhalten, d.h. eine Verdoppelung von n bewirkt eine Halbierung des Fehlers.

Beispiel 2.8 Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t + y(t) \quad \text{für } t \in [0, 1], \quad y(0) = 0$$

mit der Lösung

$$y(t) = e^t - t - 1, \quad y'(t) = e^t - 1, \quad y''(t) = e^t.$$

Dann ist

$$c_K = \frac{1}{2} \max_{t \in [0,1]} |y''(t)| = \frac{1}{2} \max_{t \in [0,1]} |e^t| = \frac{e}{2}.$$

Für $f(t, y) = t + y$ gilt die Lipschitz-Stetigkeit (2.22) mit $L = 1$. Für das Eulersche Polygonzugverfahren (2.26) mit der Schrittweite $h = 1/n$ gilt dann die Fehlerabschätzung (2.30) in der Form

$$|y(1) - y_n| \leq \frac{e^2}{2n}.$$

Für verschiedene Diskretisierungen $n = 2^j$, $j = 2, \dots, 7$ werden in Tabelle 2.1 die tatsächlichen Fehler $|y(1) - y_n|$ mit der Fehlerabschätzung $e^2/(2n)$ verglichen. Es zeigt sich, daß der tatsächliche Fehler durch die Fehlerabschätzung um den Faktor 10 überschätzt wird.

n	y_n	$e^2/(2n)$	$ y(1) - y_n $
4	0.801758	9.24 -1	8.35 -2
8	0.761508	4.62 -1	4.32 -2
16	0.740299	2.31 -1	2.20 -2
32	0.729396	1.15 -1	1.11 -2
64	0.723866	5.77 -2	5.58 -3
128	0.721081	2.89 -2	2.80 -3

Tabelle 2.1: Fehler des expliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens.

Im Gegensatz zur linksseitigen Rechteckregel (2.24) führt die Verwendung der rechtsseitigen Rechteckregel

$$\int_a^b g(t) dt \approx (b - a)g(b) \quad (2.31)$$

auf

$$\tilde{y}_{k+1} = y(t_k) + h f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) \quad (2.32)$$

und in der Folge auf das implizite Eulersche Polygonzugverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (2.33)$$

Beispiel 2.9 Für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t + y(t) \quad \text{für } t \in [0, 1], \quad y(0) = 0$$

lautet die Rekursionsvorschrift des impliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens (2.33)

$$y_0 = 0, \quad y_{k+1} = y_k + h(t_{k+1} + y_{k+1}) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Insbesondere ergibt sich die neue Näherungslösung y_{k+1} aus

$$y_{k+1} = \frac{y_k + ht_{k+1}}{1 - h} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Dabei ist $h < 1$ vorauszusetzen. In Tabelle 2.2 ist ein Vergleich des Fehlers des impliziten Verfahrens mit dem Fehler des expliziten Verfahrens angegeben.

n	explizit		implizit	
	y_n	$ y(1) - y_n $	y_n	$ y(1) - y_n $
4	0.801758	$8.35 \cdot 10^{-2}$	1.160494	$4.42 \cdot 10^{-1}$
8	0.761508	$4.32 \cdot 10^{-2}$	0.910285	$1.92 \cdot 10^{-1}$
16	0.740299	$2.20 \cdot 10^{-2}$	0.808404	$9.01 \cdot 10^{-2}$
32	0.729396	$1.11 \cdot 10^{-2}$	0.762009	$4.37 \cdot 10^{-2}$
64	0.723866	$5.58 \cdot 10^{-3}$	0.739827	$2.15 \cdot 10^{-2}$
128	0.721081	$2.80 \cdot 10^{-3}$	0.728977	$1.07 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 2.2: Vergleich der expliziten und impliziten Eulerschen Polygonzugverfahren.

Anders als bei der in Beispiel 2.9 betrachteten Funktion $f(t, y) = t + y$ erfordert das implizite Eulersche Polygonzugverfahren (2.33) meist das Lösen einer nichtlinearen Gleichung, d.h. (2.33) ist äquivalent zur Bestimmung der Nullstelle y_{k+1} von

$$g(y_{k+1}) = y_{k+1} - y_k - hf(t_{k+1}, y_{k+1}) = 0. \quad (2.34)$$

Die nichtlineare Gleichung (2.34) kann zum Beispiel durch ein Newton-Verfahren gelöst werden,

$$y_{k+1}^{i+1} = y_{k+1}^i - \frac{g(y_{k+1}^i)}{g'(y_{k+1}^i)} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Als Startnäherung y_{k+1}^0 des Newton-Verfahrens (2.35) kann beispielsweise die durch das explizite Eulersche Polygonzugverfahren (2.26) konstruierte Näherungslösung verwendet werden.

Neben den Rechteckregeln (2.24) und (2.31) kann für die Auswertung des Integrals in (2.23) auch die Trapezregel

$$\int_a^b g(t) dt \approx \frac{1}{2}(b - a)[g(a) + g(b)] \quad (2.36)$$

verwendet werden. Dies führt auf

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h [f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))] \quad (2.37)$$

und somit auf das implizite Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})] \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.38)$$

Ersetzt man in der rechten Seite von (2.38) den unbekanntem Lösungswert y_{k+1} durch den durch das explizite Eulersche Polygonzugverfahren (2.26) berechneten Näherungswert, so erhält man mit

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))] \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.39)$$

ein explizites Verfahren, das Heunsche Verfahren.

Die allgemeine Form von expliziten Einschrittverfahren ist gegeben durch

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.40)$$

Für das Eulersche Polygonzugverfahren (2.26) ist

$$\Phi_{\text{Euler}}(t, y, h) := f(t, y),$$

und für das Heunsche Verfahren (2.39) ist

$$\Phi_{\text{Heun}}(t, y, h) := \frac{1}{2}[f(t, y) + f(t+h, y+hf(t, y))].$$

Die allgemeine Darstellung (2.40) eines expliziten Einschrittverfahrens ist äquivalent zu

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \Phi(t_k, y_k, h).$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 2.1 *Ein numerisches Näherungsverfahren*

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0$$

heißt konsistent von der Ordnung p , falls

$$\left| \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \Phi(t_k, y(t_k), h) \right| \leq c_K h^p \quad (2.41)$$

mit einer positiven Konstanten c_K gilt.

Beispiel 2.10 Für das explizite Eulersche Polygonzugverfahren (2.26) folgt aus der Fehlerabschätzung (2.29)

$$\left| \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f(t_k, y(t_k)) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0, T]} |y''(t)| h \quad (2.42)$$

und somit die Konsistenzordnung $p = 1$.

Für ein konsistentes Näherungsverfahren kann unter Ausnutzung der Lipschitz–Stetigkeit der Funktion $\Phi(t, y, h)$ eine Fehlerabschätzung analog zum Spezialfall des expliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens hergeleitet werden.

Satz 2.2 Für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0$$

sei ein explizites Näherungsverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h \Phi(t_k, y_k, h) \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{T - t_0}{n}$$

gegeben, für welches die Konsistenzfehlerabschätzung

$$\left| \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \Phi(t_k, y(t_k), h) \right| \leq c_K h^p$$

gilt. Weiterhin sei $\Phi(t, y, h)$ bezüglich y Lipschitz–stetig, d.h. es gilt

$$|\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)| \leq c_L |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } t \geq t_0, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.43)$$

Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$|y(T) - y_n| \leq \frac{c_K}{c_L} e^{c_L(T-t_0)} h^p. \quad (2.44)$$

Für ein konsistentes Näherungsverfahren folgt aus der Stabilität des Verfahrens auch die Konvergenz der Näherungslösungen, wobei die Konvergenzordnung mit der Konsistenzordnung übereinstimmt. Die Fehlerabschätzung (2.30) des expliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens (2.26) ist offenbar ein Spezialfall der Fehlerabschätzung (2.44).

Die Lipschitz–Stetigkeit von $\Phi(t, y, h)$ folgt meist aus der Lipschitz–Stetigkeit der Funktion $f(t, y)$. Für das Heunische Verfahren (2.39) ist beispielsweise

$$\begin{aligned} & |\Phi_{\text{Heun}}(t, y_1, h) - \Phi_{\text{Heun}}(t, y_2, h)| \\ &= \left| \frac{1}{2} [f(t, y_1) + f(t+h, y_1 + hf(t, y_1))] - \frac{1}{2} [f(t, y_2) + f(t+h, y_2 + hf(t, y_2))] \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| + \frac{1}{2} |f(t+h, y_1 + hf(t, y_1)) - f(t+h, y_2 + hf(t, y_2))| \\ &\leq \frac{1}{2} L |y_1 - y_2| + \frac{1}{2} L |(y_1 + hf(t, y_1)) - (y_2 + hf(t, y_2))| \\ &\leq \frac{1}{2} L |y_1 - y_2| + \frac{1}{2} L |y_1 - y_2| + \frac{1}{2} L h |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \\ &\leq L |y_1 - y_2| + \frac{1}{2} L^2 h |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

und somit gilt (2.43) mit

$$c_L = L + \frac{1}{2} L^2 h.$$

Die Abschätzung des Konsistenzfehlers (2.42) der Ordnung $p = 1$ des Eulerschen Polygonzugverfahrens beruhte auf einer Taylor-Entwicklung der Lösung $y(t)$ mit einem Restglied 2. Ordnung. Zur Herleitung von Näherungsverfahren höherer Konsistenzordnung kann man eine Taylor-Entwicklung höherer Ordnung betrachten. Mit

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

ist mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &= y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{1}{2}h^2y''(t_k) + \frac{1}{6}h^3y'''(\xi_k) \\ &= y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) + \frac{1}{2}h^2 \left. \frac{d}{dt} f(t, y(t)) \right|_{t=t_k} + \frac{1}{6}h^3y'''(\xi_k) \\ &= y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) + \frac{1}{2}h^2 [f_t(t_k, y(t_k)) + f_y(t_k, y(t_k))f(t_k, y(t_k))] + \frac{1}{6}h^3y'''(\xi_k) \end{aligned}$$

mit einer Zwischenwertstelle $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$. Für

$$\Phi(t, y, h) := f(t, y) + \frac{1}{2}h [f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)] \quad (2.45)$$

gilt dann die Konsistenzfehlerabschätzung (2.41) mit $p = 2$ und

$$c_K = \frac{1}{6} \max_{t \in [t_0, T]} |y'''(t)|.$$

Um die Auswertung der partiellen Ableitungen $f_t(t, y)$ und $f_y(t, y)$ zu vermeiden, betrachtet man den Ansatz

$$\Phi(t, y, h) = a_1 f(t, y) + a_2 f(t + \alpha, y + \beta) \quad (2.46)$$

mit noch zu bestimmenden Parametern a_1, a_2, α, β . Die Anwendung der Taylor-Formel in zwei Veränderlichen ergibt zunächst

$$f(t + \alpha, y + \beta) = f(t, y) + \alpha f_t(t, y) + \beta f_y(t, y) + R_2(f)$$

mit dem Restglied

$$R_2(f) = \frac{1}{2} [\alpha^2 f_{tt}(t_\xi, y_\xi) + 2\alpha\beta f_{ty}(t_\xi, y_\xi) + \beta^2 f_{yy}(t_\xi, y_\xi)]$$

und geeigneten Zwischenwertstellen

$$t_\xi = t + \xi\alpha, \quad y_\xi = y + \xi\beta, \quad \xi \in (0, 1).$$

Durch Gleichsetzen von (2.45) und (2.46) folgt dann

$$\begin{aligned}\Phi(t, y, h) &= f(t, y) + \frac{1}{2}h [f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)] \\ &= a_1f(t, y) + a_2f(t + \alpha, y + \beta) \\ &= (a_1 + a_2)f(t, y) + a_2\alpha f_t(t, y) + a_2\beta f_y(t, y) + a_2R_2(f)\end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_2\alpha = \frac{1}{2}h, \quad a_2\beta = \frac{1}{2}hf(t, y).$$

Zur Bestimmung der vier Parameter a_1, a_2, α, β sind nur drei Gleichungen gegeben, deshalb kann die Lösung nicht eindeutig sein. Vielmehr können durch eine geschickte Wahl der Parameter verschiedene Verfahren hergeleitet werden. Insbesondere für

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha = h, \quad \beta = hf(t, y)$$

ergibt sich mit

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y))] + \mathcal{O}(h^2)$$

die Vorschrift des Heunschen Verfahrens (2.39) mit der Konsistenzordnung $p = 2$. Das Heunsche Verfahren ist ein Runge–Kutta Verfahren 2. Ordnung mit der Bildungsvorschrift

$$\begin{aligned}K_1 &= f(t_k, y_k), \\ K_2 &= f(t_k + h, y_k + hK_1), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{2}h [K_1 + K_2].\end{aligned}\tag{2.47}$$

Entsprechend ist durch

$$\begin{aligned}K_1 &= f(t_k, y_k), \\ K_2 &= f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hK_1), \\ K_3 &= f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hK_2), \\ K_4 &= f(t_k + h, y_k + hK_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6}h [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]\end{aligned}\tag{2.48}$$

ein Runge–Kutta Verfahren 4. Ordnung gegeben.

Beispiel 2.11 Für einen Vergleich der behandelten Einschrittverfahren wird wieder das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t) + t \quad \text{für } t \in [0, 1], \quad y(0) = 0$$

mit der Lösung

$$y(t) = e^t - t - 1$$

betrachtet. Für das Eulersche Polygonzugverfahren (2.26), für das Heunsche Verfahren (2.39), sowie für das Runge–Kutta Verfahren (2.48) werden in Tabelle 2.3 die Näherungslösungen y_n und die Fehler $|y(1) - y_n|$ für verschiedene Diskretisierungsparameter n angegeben.

n	Eulersches Verfahren		Heunsches Verfahren		Runge–Kutta Verfahren	
	y_n	$ y(1) - y_n $	y_n	$ y(1) - y_n $	y_n	$ y(1) - y_n $
4	0.801758	8.35 -2	0.694856	2.34 -2	0.718209939	7.19 -5
8	0.761508	4.32 -2	0.711841	6.44 -3	0.718276844	4.98 -6
16	0.740299	2.20 -2	0.716594	1.69 -3	0.718281500	3.28 -7
32	0.729396	1.11 -2	0.717850	4.32 -4	0.718281807	2.11 -8
64	0.723866	5.58 -3	0.718173	1.09 -4	0.718281827	1.33 -9
128	0.721081	2.80 -3	0.718254	2.75 -5	0.718281828	7.59 -11

Tabelle 2.3: Numerischer Vergleich von expliziten Einschrittverfahren.

2.4 A–Stabilität

Zu diskutieren bleibt der Unterschied zwischen expliziten und impliziten Verfahren am Beispiel des Eulerschen Polygonzugverfahrens.

Beispiel 2.12 Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -100y(t) \quad \text{für } t \in [0, 1], \quad y(0) = 1$$

mit der Lösung

$$y(t) = e^{-100t}, \quad y(1) = e^{-100} \approx 3.72 \cdot 10^{-44}.$$

Die Iterationsvorschrift des expliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens (2.26) lautet

$$y_{k+1} = y_k - 100 h y_k, \quad y_0 = 1,$$

die Iterationsvorschrift des impliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens (2.33) lautet

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + 100h} \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1, \quad y_0 = 1.$$

Die in Tabelle (2.4) angegebenen Lösungswerte y_n des impliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens (2.33) belegen das Abklingverhalten der Lösung $y(t) = e^{-100t}$ für alle Diskretisierungsparameter n . Im Gegensatz dazu liefert das explizite Eulersche Polygonzugverfahren (2.26) für $n \leq 32$ eine Näherungslösung y_n , welche gegen unendlich strebt, erst für $n = 64$ und eine somit hinreichend kleine Maschenweite h zeigt die Näherungslösung y_n das richtige Abklingverhalten.

n	explizit	implizit
	y_n	y_n
4	$3.32 \cdot 10^5$	$2.19 \cdot 10^{-6}$
8	$3.06 \cdot 10^8$	$9.06 \cdot 10^{-10}$
16	$3.33 \cdot 10^{11}$	$1.72 \cdot 10^{-14}$
32	$2.99 \cdot 10^{10}$	$2.03 \cdot 10^{-20}$
64	$1.02 \cdot 10^{-16}$	$7.01 \cdot 10^{-27}$

Tabelle 2.4: Stabilität der Eulerschen Polygonzugverfahren.

Dieses Beispiel motiviert die folgende Definition der A–Stabilität.

Definition 2.2 Ein numerisches Verfahren heißt A–stabil, wenn die durch das Verfahren erzeugten Näherungslösungen des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq 0$$

beschränkt sind. Insbesondere geben die Näherungslösungen das asymptotische Verhalten der Lösung

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

wieder.

Für Einschrittverfahren der allgemeinen Form

$$y_{k+1} = y_k + h \Phi(t_k, y_k, h) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

ergibt sich für $f(t, y) = \lambda y$ eine Rekursionsvorschrift der Form

$$y_{k+1} = R(\lambda h) y_k = [R(\lambda h)]^{k+1} y_0$$

mit einer Stabilitätsfunktion $R(z)$, $z = \lambda h$. Dann ist die A–Stabilität äquivalent zu der Forderung

$$|R(z)| \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Beispiel 2.13 Für das explizite Eulersche Polygonzugverfahren (2.26) und $f(t, y) = \lambda y$ ist

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k) = y_k + h \lambda y_k = (1 + h \lambda) y_k.$$

Damit ist die zugehörige Stabilitätsfunktion

$$R(z) = 1 + z$$

und die A–Stabilität des expliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens folgt für

$$|1 + \lambda h| \leq 1.$$

Insbesondere für $\lambda = -100$, siehe Beispiel 2.12, ergibt sich daraus die Forderung

$$h \leq \frac{1}{50}.$$

In Beispiel 2.12 ist diese Bedingung erst für $n = 64$ erfüllt.

Beispiel 2.14 Für das implizite Eulersche Polygonzugverfahren (2.33) und $f(t, y) = \lambda y$ ist

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) = y_k + h\lambda y_{k+1}$$

und somit

$$y_{k+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_k.$$

Damit ist die zugehörige Stabilitätsfunktion

$$R(z) = \frac{1}{1 - z}$$

und es gilt

$$|R(z)| \leq 1 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Das implizite Eulersche Polygonzugverfahren ist daher unabhängig von der Maschenweite h A -stabil, siehe hierzu auch Beispiel 2.12.

2.5 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wir betrachten ein System von m explizit gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung von m unbekannt Funktionen $y_1(t), \dots, y_m(t)$, so daß

$$y'_j(t) = f_j(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y_j(t_0) = y_{0,j}, \quad (2.49)$$

für alle $j = 1, \dots, m$ erfüllt ist. Die Differentialgleichungen sind linear, falls gilt

$$y'_j(t) = a_{j1}(t)y_1(t) + \dots + a_{jm}(t)y_m(t) + g_j(t),$$

d.h. wir betrachten ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t) + \underline{g}(t), \quad A(t) = (a_{ji}(t))_{i,j=1}^m.$$

Für konstante Koeffizienten a_{ji} und $g_j(t) = 0$ erhalten wir das homogene System

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) \quad \text{für } t > t_0, \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0. \quad (2.50)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda t} \underline{v}$$

ergibt sich durch Einsetzen

$$\underline{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \underline{v} = A(e^{\lambda t} \underline{v}) = e^{\lambda t} A \underline{v}$$

und somit folgt

$$\lambda \underline{v} = A \underline{v},$$

d.h. λ ist ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit dem zugehörigen Eigenvektor \underline{v} . Für m paarweise verschiedene Eigenwerte λ_ℓ und zueinander orthogonale Eigenvektoren \underline{v}_ℓ ergibt sich dann als Lösung des Anfangswertproblems (2.50)

$$\underline{y}(t) = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell e^{\lambda_\ell t} \underline{v}_\ell, \quad (2.51)$$

wenn die Anfangsdaten durch

$$\underline{y}_0 = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell \underline{v}_\ell$$

gegeben sind. Im Fall mehrfacher Eigenwerte ist der Lösungsansatz gegebenenfalls entsprechend zu modifizieren. Die Lösung (2.51) ist beschränkt für $t \rightarrow \infty$, wenn für alle Koeffizienten α_ℓ mit $\alpha_\ell \neq 0$ gilt

$$\operatorname{Re} \lambda_\ell \leq 0.$$

Beispiel 2.15 *Betrachtet wird das Anfangswertproblem*

$$y_1'(t) = y_2(t), \quad y_2'(t) = y_1(t) \quad \text{für } t > 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0,$$

d.h.

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Eigenwerte der Matrix A ist

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

und somit

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Für die zugehörigen Eigenvektoren folgt

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für den Vektor der Anfangsdaten folgt

$$\underline{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} [\underline{v}_1 + \underline{v}_2].$$

Somit ist

$$\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \left[e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

bzw.

$$y_1(t) = \frac{1}{2} [e^t + e^{-t}], \quad y_2(t) = \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}].$$

Für die Herleitung eines numerischen Verfahrens zur näherungsweise Lösung des Anfangswertproblems (2.50) betrachten wir analog zur Herleitung des vorwärtigen Eulerschen Polygonzugverfahrens (2.26) eine Approximation der Ableitung durch den vorwärtigen Differenzenquotienten,

$$\frac{1}{h} [\underline{y}^{k+1} - \underline{y}^k] = A \underline{y}^k \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dabei beschreibt \underline{y}^k eine Approximation der Lösung $\underline{y}(t_k)$. Damit ergibt sich die Rekursionsvorschrift

$$\underline{y}^{k+1} = (I + hA) \underline{y}^k = (I + hA)^{k+1} \underline{y}_0.$$

Die Entwicklung des Anfangsvektors \underline{y}_0 nach den Eigenvektoren von A liefert

$$\underline{y}_0 = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell \underline{v}_\ell,$$

und somit folgt

$$\underline{y}^{k+1} = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell (1 + h\lambda_\ell)^{k+1} \underline{v}_\ell. \quad (2.52)$$

Wir betrachten jetzt den Fall $\operatorname{Re} \lambda_\ell \leq 0$ für $\alpha_\ell \neq 0$, d.h. die Lösung (2.51) ist beschränkt für $t \rightarrow \infty$. Für die Beschränktheit der Näherungslösung (2.52) ist an die Maschenweite h die Bedingung

$$|1 + h\lambda_\ell| \leq 1 \quad \text{für alle } \ell = 1, \dots, m$$

zu stellen. In diesem Fall heißt das Verfahren bedingt A -stabil.

Beispiel 2.16 *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$y_1'(t) = 99y_2(t) - 101y_1(t), \quad y_2'(t) = 99y_1(t) - 101y_2(t), \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0$$

mit der Lösung

$$\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \left[e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-200t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Der zweite Summand klingt stark ab, dominierend ist der erste Summand. Für die A -Stabilität zu fordern ist aber

$$|1 + h\lambda_\ell| \leq 1 \quad \text{für } \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -200,$$

d.h. die für die bedingte A -Stabilität notwendige Schrittweite

$$h \leq \frac{1}{100}$$

wird durch den betragsmäßig größten Eigenwert λ_2 bestimmt, dessen Lösungsanteil aber einen vernachlässigbaren Anteil beschreibt. Solche Systeme heißen steif.

2.6 Mehrschrittverfahren

Die Herleitung von Einschrittverfahren, zum Beispiel des Eulerschen Polygonzugverfahrens, zur näherungsweise Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t > t_0, \quad y(t_0) = y_0$$

basiert einerseits auf der numerischen Integration von

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)),$$

andererseits kann dieses auch durch eine Approximation der Ableitung durch Differenzenquotienten,

$$y'(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} \approx f(t_k, y(t_k)),$$

begründet werden. In beiden Fällen ergibt sich das Eulersche Polygonzugverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k).$$

Bei Einschrittverfahren erfolgt die Berechnung der Näherungslösung y_{k+1} in t_{k+1} also nur aus der Kenntnis der Lösung y_k in t_k . Werden hingegen mehrere Paare (t_ℓ, y_ℓ) zur Berechnung von y_{k+1} verwendet, so führt dies auf Mehrschrittverfahren. Analog zu Einschrittverfahren können diese sowohl durch eine Approximation des Differenzenquotienten als auch durch eine numerische Integration hergeleitet werden. Hier sollen vor allem Zweischrittverfahren behandelt werden, auf eine Diskussion allgemeiner Mehrschrittverfahren soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Während die Verwendung des vorwärtigen Differenzenquotienten

$$y'(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

auf das explizite Eulersche Polygonzugverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$$

führt, so folgt aus dem rückwärtigen Differenzenquotienten

$$y'(t_{k+1}) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

das implizite Eulersche Polygonzugverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Wird hingegen der zentrale Differenzenquotient

$$y'(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_{k-1}))}{2h}$$

verwendet, so ergibt sich mit dem modifizierten Eulerschen Verfahren

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h f(t_k, y_k) \quad (2.53)$$

ein erstes Zweischrittverfahren. Dieses entspricht der numerischen Integration von

$$y(t_{k+1}) = y(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx y(t_{k-1}) + 2h f(t_k, y(t_k))$$

durch die Mittelpunkregel. Neben der durch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ gegebenen Startnäherung muß die Näherung y_1 durch ein geeignetes Einschrittverfahren bestimmt werden.

Die Approximation der Ableitung $y'(t_k)$ durch Konvexkombinationen des vorwärtigen und rückwärtigen Differenzenquotienten liefert

$$y'(t_k) \approx \alpha \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} + (1 - \alpha) \frac{y(t_k) - y(t_{k-1}))}{h}$$

für beliebige Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\alpha = 3/2$ ergibt sich zum Beispiel

$$3y_{k+1} = 4y_k - y_{k-1} + 2h f(t_k, y_k),$$

während für $\alpha = -1/2$

$$y_{k+1} = 4y_k - 3y_{k-1} - 2h f(t_k, y_k)$$

folgt.

Beispiel 2.17 Für die näherungsweise Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = 0$ und $y(0) = 0$ wird das konsistente Zweischrittverfahren

$$y_{k+1} = 4y_k - 3y_{k-1}$$

mit den Startwerten $y_0 = 0$ und einem gestörten Näherungswert $y_1 = \varepsilon \neq 0$ betrachtet. Zur Bestimmung der Lösung y_{k+1} kann die Differenzgleichung

$$y_{k+1} - 4y_k + 3y_{k-1} = 0$$

betrachtet werden. Der Ansatz $y_k = \lambda^k$ ergibt

$$0 = \lambda^{k+1} - 4\lambda^k + 3\lambda^{k-1} = \lambda^{k-1}[\lambda^2 - 4\lambda + 3]$$

und somit die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung der Differenzgleichung ist dann gegeben durch

$$y_k = c_1 + c_2 3^k \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Aus den Anfangsbedingungen $y_0 = 0$ und $y_1 = \varepsilon$ folgt $c_1 + c_2 = 0$ und $c_1 + 3c_2 = \varepsilon$ und somit $c_1 = -\varepsilon/2$ bzw. $c_2 = \varepsilon/2$. Damit ist

$$y_k = \frac{1}{2} \varepsilon (3^k - 1)$$

und die Divergenz des Näherungsverfahrens folgt wegen $\lambda_2 = 3 > 1$.

Wie das vorherige Beispiel zeigt, ist für die Stabilität eines Mehrschrittverfahrens die sogenannte Wurzelbedingung hinreichend und notwendig, d.h. alle im allgemeinen komplexen Nullstellen der charakteristischen Gleichung des Näherungsverfahrens sind betragsmäßig nicht größer als Eins, mehrfache Wurzeln sind echt kleiner Eins.

Beispiel 2.18 Für die Rekursionsvorschrift

$$3y_{k+1} = 4y_k - y_{k-1} + 2hf(t_k, y_k)$$

lautet das charakteristische Polynom

$$\sigma(\lambda) = 3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (3\lambda - 1)(\lambda - 1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1/3$ und $\lambda_2 = 1$. Damit ist die Wurzelbedingung erfüllt, woraus die Stabilität des Verfahrens folgt.

Zur Bestimmung einer Näherungslösung y_{k+1} in t_{k+1} kann die Lösung $y(t)$ durch ein Lagrangesches Interpolationspolynom $p_m(t)$ vom Grad m approximiert werden,

$$p_m(t) = \sum_{j=0}^m y_{k+1-j} \tilde{L}_j^m(t), \quad \tilde{L}_j^m(t) = \prod_{i=0, i \neq j}^m \frac{t - t_{k+1-i}}{t_{k+1-j} - t_{k+1-i}},$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$p'_m(t_{k+1}) = f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Dieses Vorgehen führt auf die BDF-Verfahren (Backward Difference Formula), welche implizit sind.

Beispiel 2.19 Für $m = 1$ ist

$$\begin{aligned} p_1(t) &= y_{k+1} \tilde{L}_0^1(t) + y_k \tilde{L}_1^1(t) \\ &= y_{k+1} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} + y_k \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} \\ &= \frac{1}{h} \left[y_{k+1}(t - t_k) - y_k(t - t_{k+1}) \right]. \end{aligned}$$

Mit

$$p_1'(t) = \frac{1}{h}(y_{k+1} - y_k)$$

folgt schließlich das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} - y_k = h f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Beispiel 2.20 Für $m = 2$ ist

$$\begin{aligned} p_2(t) &= y_{k+1} \tilde{L}_0^2(t) + y_k \tilde{L}_1^2(t) + y_{k-1} \tilde{L}_2^2(t) \\ &= y_{k+1} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \frac{t - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}} + y_k \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} + y_{k-1} \frac{t - t_{k+1}}{t_{k-1} - t_{k+1}} \frac{t - t_k}{t_{k-1} - t_k} \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} y_{k+1}(t - t_k)(t - t_{k-1}) - y_k(t - t_{k+1})(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2} y_{k-1}(t - t_{k+1})(t - t_k) \right]. \end{aligned}$$

Mit

$$p_2'(t) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} y_{k+1} [2t - (t_k + t_{k-1})] - y_k [2t - (t_{k+1} + t_{k-1})] + \frac{1}{2} y_{k-1} [2t - (t_{k+1} + t_k)] \right]$$

und

$$p_2'(t_{k+1}) = \frac{1}{h} \left[\frac{3}{2} y_{k+1} - 2y_k + \frac{1}{2} y_{k-1} \right]$$

folgt schließlich das BDF-Verfahren zweiter Ordnung,

$$y_{k+1} - \frac{4}{3} y_k + \frac{1}{3} y_{k-1} = \frac{2}{3} h f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Als alternativer Zugang zu Mehrschrittverfahren werden im folgenden numerische Integrationsformeln zur Auswertung von

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt$$

betrachtet. Als Beispiel betrachten wir die quadratische Interpolation von $g(t) = f(t, y(t))$ in den Knoten t_{k-2} , t_{k-1} und t_k mit Lagrange-Polynomen,

$$g_2(t) = g(t_{k-2}) L_{k-2}^2(t) + g(t_{k-1}) L_{k-1}^2(t) + g(t_k) L_k^2(t)$$

mit

$$\begin{aligned} L_{k-2}^2(t) &= \frac{(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-2} - t_k)}, \\ L_{k-1}^2(t) &= \frac{(t - t_{k-2})(t - t_k)}{(t_{k-1} - t_{k-2})(t_{k-1} - t_k)}, \\ L_k^2(t) &= \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1})}. \end{aligned}$$

Einsetzen des Interpolationspolynoms ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k+1} &= y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} g_2(t) dt \\ &= y(t_k) + g(t_{k-2}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_{k-2}^2(t) dt + g(t_{k-1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_{k-1}^2(t) dt + g(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_k^2(t) dt \\ &= y(t_k) + \frac{5}{12} h g(t_{k-2}) - \frac{4}{3} h g(t_{k-1}) + \frac{23}{12} h g(t_k) \\ &= y(t_k) + \frac{5}{12} h f(t_{k-2}, y(t_{k-2})) - \frac{4}{3} h f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) + \frac{23}{12} h f(t_k, y(t_k)). \end{aligned}$$

Ersetzen der unbekanntenen Lösungswerte $y(t_\ell)$ durch die bereits berechneten Näherungslösungen y_ℓ ergibt das explizite Adams–Bashforth–Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{12} h [5 f(t_{k-2}, y_{k-2}) - 16 f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 23 f(t_k, y_k)].$$

Im Gegensatz hierzu liefert die Interpolation in den Stützstellen t_{k-1} , t_k und t_{k+1} mit

$$g_2(x) = g(t_{k-1})L_{k-1}^2(t) + g(t_k)L_k^2(t) + g(t_{k+1})L_{k+1}^2(t)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k+1} &= y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} g_2(t) dt \\ &= y(t_k) + g(t_{k-1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_{k-1}^2(t) dt + g(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_k^2(t) dt + g(t_{k+1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_{k+1}^2(t) dt \\ &= y(t_k) - \frac{1}{12} h f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) + \frac{2}{3} h f(t_k, y(t_k)) + \frac{5}{12} h f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) \end{aligned}$$

das implizite Adams–Moulton–Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{12} h [5f(t_{k+1}, y_{k+1}) + 8f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})].$$

2.7 Aufgaben

2.1. Gegeben seien das Heunsche Verfahren und das modifizierte Euler–Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hf(t_k, y_k)\right).$$

- a. Man zeige, daß die Verfahren das selbe A –Stabilitätsgebiet haben.
- b. Man zeige, daß die Verfahren nicht unbedingt A –stabil sind.

2.2. Gegeben sei das Mehrschrittverfahren

$$y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_0y_k = h \left[b_0f(t_k, y_k) + b_1f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right].$$

Man bestimme a_0 , b_0 und b_1 in Abhängigkeit von a_1 so, daß man ein Verfahren von mindestens zweiter Konsistenzordnung erhält.

2.3. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) + 2t y(t) = 0, \quad t > 0, \quad y(0) = 1.$$

- a. Man bestimme die exakte Lösung.
- b. Mit Hilfe des expliziten Euler Verfahrens und einer Schrittweite $h = 1$ berechne man die Näherungslösung in $t = 2$. Bewerten Sie die Lösung und begründen Sie Ihre Antwort.
- c. Mit Hilfe des impliziten Euler Verfahrens und einer Schrittweite $h = 1$ berechne man die Näherungslösung in $t = 2$. Bewerten Sie die Lösung und begründen Sie Ihre Antwort.

2.4. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t - 2y(t), \quad t > 0, \quad y(0) = 0.$$

- a. Man bestimme die exakte Lösung.
- b. Man verwende das auf der Trapezregel beruhende implizite Verfahren mit der Schrittweite $h = 1$ zur Berechnung der Näherungslösung in $t = 100$.
- c. Kann für die Berechnung auch das Heunsche Verfahren mit $h = 1$ verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

2.5. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) + y(t) = e^{-t}, \quad t > 0, \quad y(0) = 1.$$

- a. Man bestimme die exakte Lösung.
- b. Man verwende das explizite Euler–Verfahren mit der Schrittweite $h = 1$ zur Berechnung der Näherungslösung in $t = 100$.

2.6. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) + 4y(t) = 1 \quad \text{für } t > 0, \quad y(0) = 2.$$

- a. Man bestimme die exakte Lösung und berechne den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
- b. Man beweise durch vollständige Induktion, daß die durch das implizite Eulersche Polygonzugverfahren für eine Maschenweite h erzeugte Folge von Näherungslösungen monoton fallend und durch $1/4$ beschränkt, und daher konvergent ist. Man berechne diesen Grenzwert.

2.7. Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) + 4y(t) = 1 \quad \text{für } t > 0, \quad y(0) = 2$$

wende man das explizite Eulersche Polygonzugverfahren an. Man zeige, daß für eine geeignete Wahl der Schrittweite h die Folge von Näherungslösungen konvergiert und bestimme den Grenzwert.

2.8. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u'(t) + 1000u(t) &= 0, & u(0) &= 1, \\ v'(t) + v(t) - 999u(t) &= 0, & v(0) &= 0. \end{aligned}$$

2.9. Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) + 8y(t) = 1 \quad \text{für } t > 0, \quad y(0) = \frac{37}{15}$$

wende man das explizite Eulersche Polygonzugverfahren an. Man zeige, daß für eine geeignete Wahl der Schrittweite h die Folge von Näherungslösungen konvergiert und bestimme den Grenzwert.

2.10. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u'(t) + v(t) &= 0, & u(0) &= 3, \\ v'(t) + u(t) &= 0, & v(0) &= 1. \end{aligned}$$

2.11. Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) + 3y(t) = 2, \quad y(0) = 2$$

wende man das implizite Eulersche Polygonzugverfahren mit einer fixen Schrittweite h an. Man zeige die Konvergenz der Folge von Näherungslösungen und bestimme den Grenzwert.

2.12. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t) - t^2 + 2t, \quad t > 1/2, \quad y(1/2) = 1/4.$$

Man bestimme die exakte Lösung. Man verwende das explizite Euler-Verfahren und das modifizierte Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k))$$

zur Berechnung der Näherungslösung in $t = 1.25$ mit der Schrittweite $h = 1/4$. Weiters ist jeweils der Fehler der Näherungslösung zu berechnen.

2.13. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t - 2y(t), \quad t > 0, \quad y(0) = 0.$$

Man bestimme die exakte Lösung. Man verwende das modifizierte Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)), \quad t_k = kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

zur Berechnung der Näherungslösung in $t = 1$ mit der Schrittweite $h = 1$. Man bestimme das A -Stabilitätsgebiet des modifizierten Euler-Verfahrens.

2.14. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(t) = \sqrt{y(t)} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0.$$

Dabei ist $y(t)$ eine reellwertige Funktion.

- Man bestimme eine nicht-triviale Lösung dieser Differentialgleichung für $t \in \mathbb{R}$.
- Ist die Lösung dieser Differentialgleichung eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Ist die Funktion $f(y) = \sqrt{y}$ für $y \in [0, 1]$ Lipschitz-stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Man bestimme die Näherungslösung bei Verwendung des expliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens mit einer Schrittweite $h < 1$.

2.15. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(t) = \sqrt{y(t)} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 1.$$

Dabei ist $y(t) \geq 0$ eine reellwertige Funktion.

- Welche Monotonie einer Lösung können Sie aus der Differentialgleichung ableiten?
- Man bestimme eine Lösung dieser Differentialgleichung für $t \in \mathbb{R}$. Führen Sie eine Probe durch!
- Warum ist die in **b.** erhaltene Lösung in \mathbb{R} stetig differenzierbar?

2.16. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 4(1 - y(t)) \quad \text{für } t > 0, \quad y(0) = 2.$$

- a. Man bestimme die Lösung $y(t)$ und den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
- b. Man bestimme die Näherungslösungen y_k für $k = 1, 2$ des expliziten Eulerschen Polygonzugverfahrens mit der Schrittweite $h = 1$. Ist diese Diskretisierung A -stabil?

Kapitel 3

Zweipunkt–Randwertprobleme

In diesem Kapitel betrachten wir analytische und numerische Lösungsverfahren für Randwertprobleme linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in einer Raumdimension. Als Beispiel betrachten wir das Dirichlet–Randwertproblem der Poisson–Gleichung,

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (3.1)$$

Sei $u_p(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, d.h. es gelte

$$-u_p''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$-u_h''(x) = 0 \quad \text{für } x \in (0, 1)$$

ist bestimmt durch

$$u_h(x) = c_0 + c_1 x.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1)$$

ist dann gegeben durch

$$u(x) = u_p(x) + c_0 + c_1 x,$$

wobei die Konstanten aus den Dirichlet–Randbedingungen gewonnen werden können,

$$u(0) = u_p(0) + c_1 = 0, \quad u(1) = u_p(1) + c_1 + c_2 = 0.$$

Insbesondere ist also

$$c_1 = -u_p(0), \quad c_2 = u_p(0) - u_p(1).$$

Damit lautet die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems (3.1)

$$u(x) = u_p(x) - u_p(0) + [u_p(0) - u_p(1)] x. \quad (3.2)$$

Beispiel 3.1 *Betrachtet wird das Dirichlet–Randwertproblem*

$$-u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$u_p(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

Dann ist

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(1-x)$$

Lösung des Randwertproblems.

3.1 Greensche Funktionen

Durch (3.2) wird die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems (3.1) dargestellt. Diese Darstellung beruht auf der Kenntnis einer partikulären Lösung u_p der inhomogenen Differentialgleichung und auf der Kenntnis der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Da dieser Zugang im wesentlichen auf den räumlich eindimensionalen Fall beschränkt ist, soll im folgenden ein anderer Zugang verfolgt werden, der sich entsprechend auch auf mehrere Raumdimensionen verallgemeinern läßt.

Gesucht ist eine geschlossene Darstellung der Lösung des Dirichlet–Randwertproblems (3.1),

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Ausgangspunkt hierfür ist die Formel der partiellen Integration,

$$\int_a^b w'(y)v(y) dy = w(y)v(y) \Big|_a^b - \int_a^b w(y)v'(y) dy.$$

Insbesondere für $w(y) = -u'(y)$ ergibt sich daraus die erste Greensche Formel

$$\int_a^b u'(y)v'(y) dy = \int_a^b [-u''(y)]v(y) dy + u'(y)v(y) \Big|_a^b. \quad (3.3)$$

Entsprechend gilt durch Vertauschen von u und v

$$\int_a^b v'(y)u'(y) dy = \int_a^b [-v''(y)]u(y) dy + v'(y)u(y) \Big|_a^b \quad (3.4)$$

und durch Gleichsetzen von (3.3) und (3.4) folgt die zweite Greensche Formel

$$\int_a^b [-u''(y)]v(y) dy + u'(y)v(y) \Big|_a^b = \int_a^b [-v''(y)]u(y) dy + v'(y)u(y) \Big|_a^b. \quad (3.5)$$

Für ein beliebig gegebenes $x \in (0, 1)$ sei zunächst $(a, b) = (0, x)$. Ferner sei $v_1(x, y)$ eine allgemeine Lösung der Laplace–Gleichung

$$-v_1''(x, y) = 0 \quad \text{für } y \in (0, x), \quad v_1(x, 0) = 0,$$

d.h. es ist

$$v_1(x, y) = a_1(x)y + b_1(x) \quad \text{für } y \in (0, x).$$

Aus der Randbedingung

$$v_1(x, 0) = 0$$

folgt $b_1(x) = 0$ und somit ist

$$v_1(x, y) = a_1(x)y.$$

Für die Lösung $u(y)$ des Dirichlet–Randwertproblems (3.1) und für $v(y) = v_1(x, y)$ folgt dann aus der zweiten Greenschen Formel (3.5) die Darstellung

$$a_1(x)u(x) = \int_0^x f(y)v_1(x, y) dy + u'(x)a_1(x)x. \quad (3.6)$$

Sei nun $(a, b) = (x, 1)$ und sei $v_2(x, y)$ Lösung von

$$-v_2''(x, y) = 0 \quad \text{für } y \in (x, 1), \quad v_2(x, 1) = 0,$$

d.h. es ist

$$v_2(x, y) = a_2(x)[y - 1].$$

Wie in (3.6) folgt dann aus (3.5) die Darstellung

$$-a_2(x)u(x) = \int_x^1 f(y)v_2(x, y) dy - u'(x)[a_2(x)(x - 1)]. \quad (3.7)$$

Durch Addition von (3.6) und (3.7) folgt

$$[a_1(x) - a_2(x)]u(x) = \int_0^x f(y)v_1(x, y) dy + \int_x^1 f(y)v_2(x, y) dy + u'(x)[a_1(x)x - a_2(x)(x - 1)].$$

Für

$$a_1(x) - a_2(x) = 1, \quad a_1(x)x - a_2(x)(x - 1) = 0$$

ergibt sich daraus die Darstellung

$$u(x) = \int_0^x f(y)v_1(x, y) dy + \int_x^1 f(y)v_2(x, y) dy \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

Unter Verwendung von

$$a_1(x) - a_2(x) = 1$$

ist

$$0 = a_1(x)x - a_2(x)(x - 1) = [a_1(x) - a_2(x)]x + a_2(x) = x + a_2(x)$$

und somit folgt

$$a_2(x) = -x, \quad a_1(x) = 1 + a_2(x) = 1 - x.$$

Damit ist

$$v_1(x, y) = (1 - x)y \quad \text{für } y \in (0, x), \quad v_2(x, y) = x(1 - y) \quad \text{für } y \in (x, 1).$$

Für die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems (3.1) gilt also die Darstellung

$$u(x) = \int_0^1 f(y)G(x, y) dy \quad \text{für } x \in (0, 1) \quad (3.8)$$

mit der Greenschen Funktion

$$G(x, y) = \begin{cases} (1 - x)y & \text{für } 0 < y < x, \\ x(1 - y) & \text{für } x < y < 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Bemerkung 3.1 Aus der Darstellungsformel (3.8) und der Greenschen Funktion (3.9) folgt für eine nicht negative Funktion $f(x) \geq 0$ für $x \in (0, 1)$ stets $u(x) \geq 0$ für $x \in (0, 1)$.

Beispiel 3.2 Die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems

$$-u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, y) dy = \int_0^x (1 - x)y dy + \int_x^1 x(1 - y) dy \\ &= \frac{1}{2}(1 - x)x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2(2 - x) = \frac{1}{2}x(1 - x). \end{aligned}$$

Die Darstellungsformel (3.8) berücksichtigt in der Konstruktion der Greenschen Funktion (3.9) die homogenen Randbedingungen in (3.1). Im folgenden soll ein anderer Zugang zur Darstellung einer Lösung des Randwertproblems (3.1) betrachtet werden, der keine Randbedingungen an die zu bestimmende Funktion v stellt. Ausgangspunkt ist die zweite Greensche Formel (3.5) für die Lösung u der Differentialgleichung $-u'' = f$,

$$\int_a^b f(y)v(y) dy + u'(y)v(y) \Big|_a^b = v'(y)u(y) \Big|_a^b + \int_a^b u(y)[-v''(y)] dy.$$

Dabei ist $(a, b) \subseteq (0, 1)$ beliebig. Sei $x \in (a, b)$ beliebig aber fest. Für $(a, b) = (0, x)$ und $v(x, y) = x - y$ folgt dann

$$\int_0^x f(y)(x - y) dy - xu'(0) = -u(x),$$

bzw. ergibt sich für $(a, b) = (x, 1)$ und $v(x, y) = y - x$

$$\int_x^1 f(y)(y - x) dy + u'(1)(1 - x) = -u(x).$$

Summation ergibt die Darstellungsformel

$$u(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(y)|x - y| dy + \frac{1}{2}xu'(0) - \frac{1}{2}u'(1)(1 - x) \quad \text{für } x \in (0, 1). \quad (3.10)$$

Die Lösung des Randwertproblems (3.1) kann also beschrieben werden, sobald die Ableitungen $u'(0)$ und $u'(1)$ bekannt sind. Für $x \rightarrow 0$ folgt aus der Randbedingung $u(0) = 0$

$$u'(1) = - \int_0^1 f(y)y dy,$$

während für $x \rightarrow 1$ und $u(1) = 0$

$$u'(0) = \int_0^1 f(y)(1 - y) dy$$

folgt. Damit ergibt sich für $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 f(y)|x - y| dy + \frac{1}{2}xu'(0) - \frac{1}{2}u'(1)(1 - x) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 f(y)|x - y| dy + \frac{1}{2} \int_0^1 f(y)x(1 - y) dy + \frac{1}{2} \int_0^1 f(y)y(1 - x) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x f(y) [x(1 - y) + y(1 - x) - (x - y)] dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^1 f(y) [x(1 - y) + y(1 - x) - (y - x)] dy \\ &= \int_0^x f(y)y(1 - x) dy + \int_x^1 f(y)x(1 - y) dy \\ &= \int_0^1 G(x, y)f(y) dy \end{aligned}$$

mit der bereits bestimmten Greenschen Funktion. Die Funktion

$$U^*(x, y) = -\frac{1}{2}|x - y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

wird als Fundamentallösung des Differentialoperators $L[u] = -u''$ bezeichnet, für $y \neq x$ ist diese Lösung der homogenen Differentialgleichung $L_y[U^*] = 0$ und es gilt

$$\int_0^1 u(y) L_y[U^*](x, y) dy = u(x) \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

3.2 Finite Differenzen Methode

Als Modellproblem betrachtet wird das Dirichlet–Randwertproblem der Poisson–Gleichung (3.1),

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

wofür jetzt numerische Verfahren für eine näherungsweise Lösung hergeleitet werden sollen.

Für den Diskretisierungsparameter $n \in \mathbb{N}$ ist durch $h = 1/n$ die Schrittweite und durch $x_k = kh$ für $k = 0, \dots, n$ sind $n + 1$ gleichmäßig verteilte Gitterpunkte gegeben. In den Gitterpunkten x_k lautet das Zweipunkt–Randwertproblem (3.1)

$$-u''(x_k) = f(x_k) \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1, \quad u(x_0) = 0, \quad u(x_n) = 0.$$

Für die inneren Gitterpunkte x_k , $k = 1, \dots, n-1$, betrachten wir eine Approximation der ersten Ableitung $u'(x_k)$ entweder durch den vorwärtigen Differenzenquotienten

$$u'(x_k) \approx \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h}, \quad (3.12)$$

oder durch den rückwärtigen Differenzenquotienten

$$u'(x_k) \approx \frac{u(x_k) - u(x_{k-1}))}{h}. \quad (3.13)$$

Für die Approximation der zweiten Ableitung $u''(x_k)$ ergibt sich durch die Kombination der vorwärtigen und rückwärtigen Differenzenquotienten (3.12) und (3.13)

$$\begin{aligned} u''(x_k) &\approx \frac{u'(x_{k+1}) - u'(x_k)}{h} \\ &\approx \frac{\frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h} - \frac{u(x_k) - u(x_{k-1}))}{h}}{h} \\ &= \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Bezeichnet $u_k \approx u(x_k)$ eine Approximation der Lösung $u(x)$ in den Gitterpunkten x_k und ist $f_k := f(x_k)$, so folgt für die Finite Differenzen Approximation des Zweipunkt–Randwertproblems (3.1)

$$\frac{-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}}{h^2} = f_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1, \quad u_0 = 0, \quad u_n = 0.$$

Damit ergeben sich insgesamt $n + 1$ Gleichungen für $n + 1$ unbekannte Lösungswerte u_0, \dots, u_n . Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $u_0 = 0$ und $u_n = 0$ ist also das lineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

zu lösen. Die Systemmatrizen

$$A_n = n^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sind symmetrisch, tridiagonal, schwach diagonal dominant, und schwach besetzt, d.h. die Matrix A_n hat

$$2 + 3(n - 3) + 2 = 3n - 5$$

Nicht–Null–Einträge.

Beispiel 3.3 Insbesondere für $n = 9$ ist die Systemmatrix A_9 gegeben durch

$$A_9 = 81 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die inverse Matrix ergibt sich

$$A_9^{-1} = \frac{1}{729} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

d.h. die inverse Matrix A_n^{-1} ist vollbesetzt, d.h. A_n^{-1} besitzt $(n - 1)^2$ Nicht–Null–Einträge.

Zu untersuchen bleibt die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (3.15), sowie das Konvergenzverhalten der durch die Lösungswerte u_k definierten Näherungslösung $u_h(x)$. Hierfür schreiben wir das Dirichlet–Randwertproblem (3.1) in der allgemeinen Form

$$L[u](x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (3.16)$$

mit dem Differentialoperator

$$L[u](x) := -u''(x) \quad \text{für } x \in (0, 1). \quad (3.17)$$

Für eine gegebene stetige Funktion $f \in C(0, 1)$ ist dann die eindeutig bestimmte Lösung u des Dirichlet–Randwertproblems (3.16) im offenen Intervall $(0, 1)$ zweimal stetig differenzierbar, und im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetig, d.h. $u \in C^2(0, 1) \cap C[0, 1]$. Sei

$$X := \{v \in C^2(0, 1) \cap C[0, 1] : v(0) = v(1) = 0\}$$

der Raum der im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen v mit verschwindenden Randwerten $v(0) = v(1) = 0$, welche im offenen Intervall $(0, 1)$ zweimal stetig differenzierbar sind. Ferner sei

$$Y := C(0, 1)$$

der Raum der im offenen Intervall $(0, 1)$ stetigen Funktionen. Dann lautet das Randwertproblem (3.16)

$$\text{Gesucht ist } u \in X: \quad Lu = f \in Y. \quad (3.18)$$

Entsprechend kann das finite Differenzenschema (3.15) geschrieben werden als

$$\text{Gesucht ist } u_h \in X_h: \quad L_h u_h = f_h \in Y_h. \quad (3.19)$$

Dabei definiert X_h einen endlich–dimensionalen Vektorraum von Funktionen v_h mit Knotenwerten v_k für $k = 0, \dots, n$ und $v_0 = v_n = 0$. Die Einschränkung (Restriktion) einer Funktion $v \in X$ auf die Gitterpunkte $\{x_k\}_{k=0}^n$ wird mit

$$R_h v = \{v(x_k)\}_{k=0}^n \in X_h$$

bezeichnet. Analog impliziert $Q_h : Y \rightarrow Y_h$ einen entsprechenden Vektorraum Y_h von Punktauswertungen $\{f(x_k)\}_{k=1}^{n-1}$ einer im Intervall $(0, 1)$ stetigen Funktion $f \in Y$, d.h.

$$Q_h f = \{f(x_k)\}_{k=1}^{n-1} \in Y_h.$$

Für den diskreten Differenzenoperator $L_h : X_h \rightarrow Y_h$ ergibt sich die Darstellung

$$L_h[u_h](x_k) := \frac{-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}}{h^2} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1.$$

Die Anwendung des Einschränkungsooperators $Q_h : Y \rightarrow Y_h$ auf die Differentialgleichung $Lu = f$ führt andererseits auf die Gleichheit

$$Q_h Lu = Q_h f = f_h = L_h u_h. \quad (3.20)$$

Definition 3.1 Ein Differenzenschema $L_h u_h = f_h$ heißt stabil bzw. gleichmäßig korrekt gestellt, wenn für eine hinreichend kleine Schrittweite $h \leq h_0$ der inverse Operator $L_h^{-1} : Y_h \rightarrow X_h$ existiert und dieser gleichmäßig beschränkt ist, d.h. es gilt

$$\|L_h^{-1}\|_{Y_h \rightarrow X_h} \leq c_S.$$

Als Operatornorm $\|L_h^{-1}\|_{Y_h \rightarrow X_h}$ wird dabei die induzierte Norm

$$\|L_h^{-1}\|_{Y_h \rightarrow X_h} = \sup_{f_h \in Y_h} \frac{\|L_h^{-1} f_h\|_{X_h}}{\|f_h\|_{Y_h}}$$

verwendet mit

$$\|v_h\|_{X_h} = \max_{k=0,\dots,n} |v_h(x_k)|, \quad \|f_h\|_{Y_h} = \max_{k=1,\dots,n-1} |f_h(x_k)|.$$

Aufgrund der unterschiedlichen Funktionenräume kann der Fehler zwischen der Lösung $u \in X$ von (3.18) und der Näherungslösung $u_h \in X_h$ von (3.19) nicht direkt betrachtet werden. Deshalb soll im folgenden die Einschränkung $R_h u \in X_h$ von $u \in X$ betrachtet werden.

Satz 3.1 *Sei $u \in X$ die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems (3.18). Für ein stabiles Differenzenschema $L_h u_h = f_h$ sei $u_h \in X_h$ die Lösung von (3.19). Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|R_h u - u_h\|_{X_h} \leq c_S \|(L_h R_h - Q_h L)u\|_{Y_h}, \quad (3.21)$$

d.h. der Fehler $R_h u - u_h$ kann für ein stabiles Differenzenschema $L_h u_h = f_h$ durch den Konsistenzfehler $(L_h R_h - Q_h L)u$ abgeschätzt werden.

Beweis: Für den Fehler eines stabilen Differenzenschemas $L_h u_h = f_h$ gilt mit (3.20)

$$\begin{aligned} R_h u - u_h &= L_h^{-1} (L_h R_h u - L_h u_h) \\ &= L_h^{-1} (L_h R_h u - f_h) \\ &= L_h^{-1} (L_h R_h u - Q_h f) \\ &= L_h^{-1} (L_h R_h u - Q_h L u) \\ &= L_h^{-1} (L_h R_h - Q_h L) u \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus der gleichmäßigen Beschränktheit von L_h^{-1} . ■

Für die Konvergenz der Näherungslösungen u_h des Differenzenschemas (3.19) ist neben der Stabilität eine Abschätzung des Konsistenzfehlers $(L_h R_h - Q_h L)u$ notwendig. Für ein stabiles Verfahren folgt also die Konvergenz der Näherungslösungen aus der Konsistenz des Verfahrens.

Beispiel 3.4 *Für das Dirichlet–Randwertproblem der Poisson–Gleichung (3.1),*

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

ergibt die Verwendung des zentralen Differenzenquotienten das Differenzenschema

$$\frac{-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}}{h^2} = f_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1, \quad u_0 = u_n = 0.$$

Damit sind

$$L[u](x) = -u''(x) \quad \text{für } x \in (0, 1)$$

und

$$Q_h L[u](x_k) = -u''(x_k) \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1$$

sowie

$$L_h[R_h u](x_k) = \frac{-u(x_{k-1}) + 2u(x_k) - u(x_{k+1}))}{h^2} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1.$$

Für die Abschätzung des Konsistenzfehlers

$$L_h[R_h u](x_k) - Q_h L[u](x_k) = \frac{-u(x_{k-1}) + 2u(x_k) - u(x_{k+1}))}{h^2} + u''(x_k)$$

für $k = 1, \dots, n-1$ betrachten wir die Taylor-Entwicklung der Lösung $u(x)$ in $x_{k\pm 1}$ um x_k . Für eine viermal stetig differenzierbare Lösung $u(x)$ folgt

$$u(x_{k+1}) = u(x_k + h) = u(x_k) + hu'(x_k) + \frac{1}{2}h^2 u''(x_k) + \frac{1}{6}h^3 u'''(x_k) + \frac{1}{24}h^4 u^{(4)}(\xi_k)$$

mit einer Zwischenwertstelle $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ bzw.

$$u(x_{k-1}) = u(x_k - h) = u(x_k) - hu'(x_k) + \frac{1}{2}h^2 u''(x_k) - \frac{1}{6}h^3 u'''(x_k) + \frac{1}{24}h^4 u^{(4)}(\tilde{\xi}_k)$$

mit einer Zwischenwertstelle $\tilde{\xi}_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Die Addition beider Ausdrücke liefert

$$u(x_{k+1}) + u(x_{k-1}) = 2u(x_k) + h^2 u''(x_k) + \frac{1}{24}h^4 [u^{(4)}(\xi_k) + u^{(4)}(\tilde{\xi}_k)].$$

Daraus folgt

$$-u''(x_k) = \frac{-u(x_{k-1}) + 2u(x_k) - u(x_{k+1}))}{h^2} + \frac{1}{24}h^2 [u^{(4)}(\xi_k) + u^{(4)}(\tilde{\xi}_k)]$$

und somit

$$Q_h L[u](x_k) - L_h[R_h u](x_k) = \frac{1}{24}h^2 [u^{(4)}(\xi_k) + u^{(4)}(\tilde{\xi}_k)].$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|L_h R_h u - Q_h L u\|_{Y_h} &= \max_{k=1, \dots, n-1} |L_h[R_h u](x_k) - Q_h[L u](x_k)| \\ &= \max_{k=1, \dots, n-1} \left| \frac{1}{24}h^2 [u^{(4)}(\xi_k) + u^{(4)}(\tilde{\xi}_k)] \right| \\ &\leq \frac{1}{12} h^2 \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|. \end{aligned}$$

Mit Satz 3.1 folgt also für ein stabiles Differenzenschema $L_h u_h = f_h$ die Fehlerabschätzung

$$\|R_h u - u_h\|_{X_h} \leq \frac{1}{12} c_S h^2 \|u^{(4)}\|_{C[0,1]}.$$

Dabei ist jedoch $u \in C^4[0,1]$ als viermal stetig differenzierbar vorzusetzen.

Bemerkung 3.2 Für eine nur dreimal stetig differenzierbare Lösung $u \in C^3[0,1]$ folgt analog die Fehlerabschätzung

$$\|R_h u - u_h\|_{X_h} \leq \frac{1}{3} c_S h \|u^{(3)}\|_{C[0,1]}.$$

Für die Untersuchung der Stabilität des Differenzenschemas $L_h u_h = f_h$ beschränken wir uns hier auf die Analyse der Eigenwerte der Systemmatrizen A_n im Fall der Poisson–Gleichung (3.1).

Satz 3.2 Für die Steifigkeitsmatrix A_n sind die Eigenvektoren \underline{v}^k für $k = 1, \dots, n-1$ gegeben durch die Einträge

$$v_\ell^k = \sin \frac{k\ell\pi}{n} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n-1$$

und die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\lambda_k(A_n) = 4n^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}. \quad (3.22)$$

Beweis: Ausgangspunkt ist das kontinuierliche Eigenwertproblem

$$-u''(x) = \lambda u(x) \quad \text{für } x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit den Eigenlösungen

$$v_k(x) = \sin k\pi x$$

und mit den zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_k = (k\pi)^2 \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Dies motiviert die Definition der Vektoren \underline{v}^k mit

$$v_\ell^k = v_k(x_\ell) = \sin k\pi x_\ell = \sin \frac{k\ell\pi}{n} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n-1.$$

Zu zeigen bleibt, daß die Vektoren \underline{v}^k die Eigenvektoren von A_n sind. Zu berechnen ist also

$$A_n \underline{v}^k = n^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ \vdots \\ v_{n-2}^k \\ v_{n-1}^k \end{pmatrix} = n^2 \begin{pmatrix} 2v_1^k - v_2^k \\ -v_1^k + 2v_2^k - v_3^k \\ \vdots \\ -v_{n-3}^k + 2v_{n-2}^k - v_{n-1}^k \\ -v_{n-2}^k + 2v_{n-1}^k \end{pmatrix}$$

und wegen $v_0^k = v_n^k = 0$ genügt für $\ell = 1, \dots, n-1$ die Auswertung von

$$-v_{\ell-1}^k + 2v_\ell^k - v_{\ell+1}^k = -\sin \frac{k(\ell-1)\pi}{n} + 2\sin \frac{k\ell\pi}{n} - \sin \frac{k(\ell+1)\pi}{n}.$$

Mit

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

und

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} -v_{\ell-1}^k + 2v_{\ell}^k - v_{\ell+1}^k &= 2 \cos \frac{k(2\ell-1)\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} - 2 \cos \frac{k(2\ell+1)\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} \\ &= 2 \sin \frac{k\pi}{2n} \left[\cos \frac{k(2\ell-1)\pi}{2n} - \cos \frac{k(2\ell+1)\pi}{2n} \right] \\ &= 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\ell\pi}{n} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} v_{\ell}^k \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. ■

Im Fall des Dirichlet-Randwertproblems (3.1) sind die Systemmatrizen A_n symmetrisch und positiv definit, und daher invertierbar. Insbesondere gilt:

Folgerung 3.1 *Mit*

$$x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leq \sin^2 x \leq x^2$$

folgt für die extremalen Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix A_n

$$\lambda_{\min}(A_n) = \lambda_1(A_n) = 4n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \geq 4n^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 \right] = \pi^2 \left[1 - \frac{\pi^2}{12n^2} \right]$$

sowie

$$\lambda_{\max}(A_n) = \lambda_{n-1}(A_n) = 4n^2 \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n} \leq 4n^2.$$

Aus der Beschränktheit von $\lambda_{\min}(A_n)$ unabhängig von n folgt die Stabilität des Differenzenschemas $L_h u_h = f_h$. Weiterhin ergibt sich für die spektrale Konditionszahl der Steifigkeitsmatrizen A_n

$$\kappa_2(A_n) = \frac{\lambda_{\max}(A_n)}{\lambda_{\min}(A_n)} \leq \frac{4n^2}{\pi^2 \left[1 - \frac{\pi^2}{12n^2} \right]} \approx \frac{4}{\pi^2} n^2.$$

Eine Verdoppelung der Freiheitsgrade n zieht also eine Vervierfachung der spektralen Konditionszahl $\kappa_2(A_n)$ nach sich. Dies ist insbesondere bei der Verwendung von iterativen Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems (3.15) zu beachten.

3.3 Finite Element Methode

Die Fehlerabschätzungen der Finiten Differenzen Methode verlangen wenigstens die Stetigkeit der dritten Ableitung der Lösung des kontinuierlichen Randwertproblems (3.1). Andererseits wird für die Definition der Differenzenquotienten ein entsprechendes Gitter benötigt, welches im betrachteten eindimensionalen Fall einfach konstruiert werden kann. Im folgenden werden wir mit der Finiten Elemente Methode ein numerisches Näherungsverfahren behandeln, welches entsprechend auch auf den mehrdimensionalen Fall übertragen werden kann. Als Beispiel betrachten wir wieder das Dirichlet–Randwertproblem der Poisson–Gleichung (3.1),

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Die Multiplikation der Differentialgleichung mit einer Testfunktion v und anschließender Integration über $(0, 1)$ ergibt zunächst

$$\int_0^1 [-u''(x)]v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Durch partielle Integration folgt

$$\int_0^1 [-u''(x)]v(x) dx = -u'(x)v(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx,$$

d.h. u ist Lösung des Variationsproblems

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \tag{3.23}$$

für alle Testfunktionen v mit $v(0) = v(1) = 0$. Die Dirichlet–Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(1) = 0$ sind dabei explizit zu fordern, daher nennt man diese auch wesentliche Randbedingungen.

Für die Existenz der in der Variationsformulierung (3.23) auftretenden Integrale ist die Quadrat–Integrierbarkeit der Funktionen u und v sowie von deren (verallgemeinerten) Ableitungen zu fordern.

Definition 3.2 Mit $W_2^1(0, 1)$ bezeichnen wir den Raum der im Intervall $(0, 1)$ quadratintegrierbaren Funktionen $v(x)$, deren erste Ableitung $v'(x)$ ebenfalls quadratintegrierbar ist,

$$W_2^1(0, 1) := \left\{ v \in L_2(0, 1) : v' \in L_2(0, 1) \right\}.$$

Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|v\|_{W_2^1(0,1)} := \left[\int_0^1 [v(x)]^2 dx + \int_0^1 [v'(x)]^2 dx \right]^{1/2}.$$

Da in der Variationsformulierung (3.23) für die Lösung u die homogenen Dirichlet–Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ noch zu berücksichtigen sind, wird der folgende Funktionenraum eingeführt:

$$V := \left\{ v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0 \right\}.$$

$u \in V$ heißt verallgemeinerte Lösung des Randwertproblems (3.1), wenn die Variationsformulierung (3.23) für alle Testfunktionen $v \in V$ erfüllt ist.

Satz 3.3 *Die Lösung des Variationsproblems (3.23) ist äquivalent zur Lösung des Minimierungsproblems*

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v) \quad (3.24)$$

mit dem Funktional

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [v'(x)]^2 dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Beweis: Sei $u \in V$ Lösung des Variationsproblems (3.23), d.h. es gilt

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \text{für alle } v \in V.$$

Für eine beliebige Testfunktion $v \in V$ und einen beliebigen Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\begin{aligned} F(u + tv) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [u'(x) + tv'(x)]^2 dx - \int_0^1 f(x)[u(x) + tv(x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [u(x)]^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx + t \left[\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx \right] + \frac{1}{2} t^2 \int_0^1 [v'(x)]^2 dx \\ &= F(u) + \frac{1}{2} t^2 \int_0^1 [v'(x)]^2 dx \geq F(u). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$F(u) \leq F(w) \quad \text{für alle } w = u + tv \in V,$$

d.h. $u \in V$ ist auch Lösung des Minimierungsproblems (3.24).

Sei nun $u \in V$ Lösung des Minimierungsproblems (3.24). Dann gilt insbesondere

$$F(u) \leq F(u + tv) \quad \text{für alle } v \in V, t \in \mathbb{R}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{d}{dt} F(u + tv)|_{t=0} = 0.$$

Aus

$$F(u + tv) = F(u) + t \left[\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx \right] + \frac{1}{2} t^2 \int_0^1 [v'(x)]^2 dx$$

folgt dann

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v \in V,$$

d.h. $u \in V$ ist auch Lösung des Variationsproblems (3.24). ■

Bemerkung 3.3 Für die Existenz einer Lösung $u \in V$ des Minimierungsproblems (3.24) ist insbesondere die Vollständigkeit des linearen Funktionenraumes V zu gewährleisten. Hierfür ist die Verwendung des Raumes $C^1(0,1)$ der stetig differenzierbaren Funktionen nicht ausreichend. Es zeigt sich, daß das Minimierungsproblem (3.24) eine eindeutige Lösung $u \in V$ besitzt.

Für die Herleitung eines Näherungsverfahrens zur Lösung des Minimierungsproblems (3.24) betrachten wir einen konformen endlichdimensionalen Teilraum

$$V_N = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^N \subset V$$

mit linear unabhängigen Basisfunktionen $\varphi_k \in V$ und bestimmen $u_N \in V_N$ als Lösung des Minimierungsproblems

$$F(u_N) = \min_{v_N \in V_N} F(v_N).$$

Mit dem Ansatz

$$v_N(x) = \sum_{k=1}^N v_k \varphi_k(x)$$

ist

$$\begin{aligned} F(v_N) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [v'_N(x)]^2 dx - \int_0^1 f(x)v_N(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N v_k v_\ell \int_0^1 \varphi'_k(x)\varphi'_\ell(x) dx - \sum_{k=1}^N v_k \int_0^1 f(x)\varphi_k(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N v_k v_\ell a_{k\ell} - \sum_{k=1}^N v_k f_k =: \tilde{F}(\underline{v}) \end{aligned}$$

mit

$$a_{k\ell} = \int_0^1 \varphi'_k(x)\varphi'_\ell(x) dx, \quad f_k = \int_0^1 f(x)\varphi_k(x) dx$$

für $k, \ell = 1, \dots, N$. Zu minimieren ist also das Funktional

$$\tilde{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}.$$

Als notwendige Bedingungen für ein Minimum ergeben sich daraus die Gleichungen

$$0 = \frac{\partial}{\partial v_j} \tilde{F}(\underline{v}) \quad \text{für } j = 1, \dots, N.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie $a_{k\ell} = a_{\ell k}$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_j} \tilde{F}(\underline{v}) &= \frac{\partial}{\partial v_j} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N v_k v_\ell a_{k\ell} - \sum_{k=1}^N v_k f_k \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial v_j} \left[\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N v_j v_\ell a_{j\ell} + \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq j}^N \sum_{\ell=1}^N v_k v_\ell a_{k\ell} - \sum_{k=1}^N v_k f_k \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial v_j} \left[\frac{1}{2} v_j^2 a_{jj} + \frac{1}{2} v_j \sum_{\ell=1, \ell \neq j}^N v_\ell a_{j\ell} + \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq j}^N \sum_{\ell=1}^N v_k v_\ell a_{k\ell} - \sum_{k=1}^N v_k f_k \right] \\
&= v_j a_{jj} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1, \ell \neq j}^N v_\ell a_{j\ell} + \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq j}^N v_k a_{kj} - f_j \\
&= \sum_{k=1}^N v_k a_{kj} - f_j.
\end{aligned}$$

Die Näherungslösung u_N ist also Lösung des endlichdimensionalen Variationsproblems

$$\sum_{k=1}^N u_k \int_0^1 \varphi'_k(x) \varphi'_j(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad \text{für alle } j = 1, \dots, N. \quad (3.25)$$

Dieses Variationsproblem ist äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$K_N \underline{u} = \underline{f}$$

mit der Steifigkeitsmatrix

$$K_N[j, k] = \int_0^1 \varphi'_k(x) \varphi'_j(x) dx \quad \text{für } k, j = 1, \dots, N$$

und mit dem Lastvektor

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad \text{für } j = 1, \dots, N.$$

Für die Konstruktion des endlich-dimensionalen Ansatzraumes V_N betrachten wir hier stückweise lineare Basisfunktionen $\varphi_k(x)$. Für $h = 1/n$ seien $n + 1$ gleichmäßig verteilte Stützstellen

$$x_k = kh \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

gegeben. Für $k = 1, \dots, n - 1$ ist dann

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} & \text{für } x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} & \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine stückweise lineare Basisfunktion mit $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$, d.h.

$$V_h = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^{n-1} \subset V$$

ist ein konformer Ansatzraum. Für die stückweise linearen Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ ist

$$\varphi'_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k), \\ -\frac{1}{h} & \text{für } x \in (x_k, x_{k+1}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit folgt

$$K_h[j, k] = \int_0^1 \varphi'_k(x) \varphi'_j(x) dx = \int_{(x_{k-1}, x_{k+1}) \cap (x_{j-1}, x_{j+1})} \varphi'_k(x) \varphi'_j(x) dx = 0$$

für $j \neq k, k \pm 1$. Für die Diagonaleinträge $K_h[k, k]$ ergibt sich

$$K_h[k, k] = \int_0^1 [\varphi'_k(x)]^2 dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(-1)^2}{h^2} dx = \frac{2}{h},$$

während für $j = k \pm 1$

$$\begin{aligned} K_h[k+1, k] &= \int_0^1 \varphi'_k(x) \varphi'_{k+1}(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h}, \\ K_h[k-1, k] &= -\frac{1}{h} \end{aligned}$$

folgt. Damit stimmt die Steifigkeitsmatrix

$$K_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

bis auf den Vorfaktor mit der Systemmatrix A_n des Differenzenschemas $L_h u_h = f_h$ überein. Daraus ergibt sich auch die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $K_h \underline{u} = \underline{f}$ und somit der Galerkin–Variationsformulierung (3.25). Zu untersuchen bleibt der Fehler $u - u_h$ der eindeutig bestimmten Näherungslösung u_h . Hierfür betrachten wir wieder den allgemeinen Fall eines konformen Ansatzraumes $V_N \subset V$. Das Variationsproblem (3.25) ist äquivalent zur Bestimmung von $u_N \in V_N$ als Lösung des Galerkin–Variationsproblems

$$\int_0^1 u'_N(x) v'_N(x) dx = \int_0^1 f(x) v_N(x) dx \quad \text{für alle } v_N \in V_N. \quad (3.26)$$

Für einen konformen Ansatzraum $V_N \subset V$ kann eine Testfunktion $v_N \in V_N$ der Galerkin-Variationsformulierung (3.26) auch in die Variationsformulierung (3.23) eingesetzt werden,

$$\int_0^1 u'(x)v'_N(x) dx = \int_0^1 f(x)v_N(x) dx \quad \text{für alle } v_N \in V_N.$$

Subtraktion von (3.26) liefert dann die Galerkin-Orthogonalität

$$\int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)]v'_N(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v_N \in V_N. \quad (3.27)$$

Für die Ableitung des Fehlers folgt unter Verwendung der Galerkin-Orthogonalität (3.27) sowie der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)]^2 dx &= \int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)][u'(x) - u'_N(x)] dx \\ &= \int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)][u'(x) - v'_N(x)] dx + \int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)][v'_N(x) - u'_N(x)] dx \\ &= \int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)][u'(x) - v'_N(x)] dx \\ &\leq \left(\int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 [u'(x) - v'_N(x)]^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

für eine beliebige Funktion $v_N \in V_N$. Daraus ergibt sich die Fehlerabschätzung

$$\int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)]^2 dx \leq \int_0^1 [u'(x) - v'_N(x)]^2 dx \quad \text{für alle } v_N \in V_N$$

bzw. Cea's Lemma

$$\int_0^1 [u'(x) - u'_N(x)]^2 dx \leq \inf_{v_N \in V_N} \int_0^1 [u'(x) - v'_N(x)]^2 dx. \quad (3.28)$$

Die Fehlerabschätzung (3.28) besagt, daß der Fehler der Näherungslösung u_N des Randwertproblems (3.1) abgeschätzt werden kann durch den bestmöglichen Approximationsfehler der Lösung u im Ansatzraum V_N . Obwohl die Lösung u des Randwertproblems (3.1) im allgemeinen unbekannt ist, kann der Approximationsfehler in (3.28) meist durch den Interpolationsfehler abgeschätzt werden.

Für das Beispiel der stückweise linearen Basisfunktionen sei

$$I_h u(x) = \sum_{k=1}^{n-1} u(x_k) \varphi_k(x). \quad (3.29)$$

die stückweise linear Interpolierende der Lösung u des Randwertproblems (3.1).

Satz 3.4 Sei u eine im Intervall $[0, 1]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, und sei $u_h = I_h u$ die stückweise linear Interpolierende mit $u(x_k) = u_h(x_k)$ für $k = 0, \dots, n$. Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\int_0^1 [u'(x) - u'_h(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u''(x)]^2 dx. \quad (3.30)$$

Beweis: Sei $u_h(x) = I_h u(x)$ die durch (3.29) gegebene stückweise linear Interpolierende. Betrachtet wird das Intervall $[x_{i-1}, x_i]$. Wegen $u_h(x_k) = u(x_k)$ für $k = 0, \dots, n$ ist

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [u'(s) - u'_h(s)] ds = u(x_i) - u(x_{i-1}) - u_h(x_i) + u_h(x_{i-1}) = 0$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u'(x) - u'_h(x)]^2 dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[u'(x) - u'_h(x) - \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'(s) - u'_h(s)) ds \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} [(u'(x) - u'_h(x)) - (u'(s) - u'_h(s))] ds \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_s^x [u''(t) - u''_h(t)] dt ds \right]^2 dx. \end{aligned}$$

Für die lokal lineare Funktion $u_h(t)$ ist $u''_h(t) = 0$ und daher ist

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [u'(x) - u'_h(x)]^2 dx = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_s^x u''(t) dt ds \right]^2 dx.$$

Durch wiederholte Anwendung der Cauchy–Schwarz–Ungleichung folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u'(x) - u'_h(x)]^2 dx &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \cdot \left(\int_s^x u''(t) dt \right) ds \right]^2 dx \\ &\leq \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^2 ds \right) \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_s^x u''(t) dt \right]^2 ds \right) dx \\ &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_s^x 1 \cdot u''(t) dt \right]^2 ds dx \\ &\leq \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \int_s^x 1^2 dt \right| \cdot \left| \int_s^x [u''(t)]^2 dt \right| ds dx \\ &\leq \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - s| ds dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u''(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - s| ds dx &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^x (x - s) ds dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-(x - s)^2]_{x_{i-1}}^x dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 dx = \frac{1}{3} (x_i - x_{i-1})^3 \end{aligned}$$

folgt schließlich

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [u'(x) - u'_h(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3}(x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u''(t)]^2 dt$$

und durch Summation folgt die Behauptung. ■

Für gleichmäßig verteilte Stützstellen $x_k = kh$ ist $h = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$ und somit folgt aus (3.30) die Fehlerabschätzung

$$\int_0^1 [u'(x) - (I_h u)'(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3} h^2 \int_0^1 [u''(x)]^2 dx.$$

Aus (3.28) ergibt sich dann für die Näherungslösung u_h der Variationsformulierung (3.25) die Fehlerabschätzung

$$\int_0^1 [u'(x) - u'_h(x)]^2 dx \leq \int_0^1 [u'(x) - (I_h u)'(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3} h^2 \int_0^1 [u''(x)]^2 dx. \quad (3.31)$$

Für die Lösung u des Randwertproblems (3.1) ist also die Quadrat-Integrierbarkeit der zweiten Ableitung $u'' \in L_2[0, 1]$ vorauszusetzen. Die Fehlerabschätzung (3.31) ergibt sich direkt aus der Galerkin-Orthogonalität (3.27) und somit aus der Variationsformulierung (3.26). Daher bezeichnet man die Fehlerabschätzung (3.31) auch als eine Fehlerabschätzung in der Energie-Norm. Abschließend soll eine Abschätzung für den Fehler $u - u_h$ hergeleitet werden, welche auf dem Aubin-Nitsche Trick beruht.

Für die Lösung u des Randwertproblems (3.1) und für die Lösung u_h der Variationsformulierung (3.26) sei $w \in V$ Lösung des Randwertproblems

$$-w''(x) = u(x) - u_h(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad w(0) = w(1) = 0. \quad (3.32)$$

$w \in V$ ist die eindeutig bestimmte Lösung der Variationsformulierung

$$\int_0^1 w'(x)v'(x)dx = \int_0^1 [u(x) - u_h(x)]v(x)dx \quad \text{für alle } v \in V. \quad (3.33)$$

Insbesondere für $v = u - u_h$ ist

$$\int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx = \int_0^1 [u(x) - u_h(x)][u(x) - u_h(x)] dx = \int_0^1 w'(x)[u'(x) - u'_h(x)] dx.$$

Sei $w_h = I_h w$ die stückweise linear Interpolierende der Lösung w des Randwertproblems (3.32). Aus der Galerkin-Orthogonalität (3.27), d.h.

$$\int_0^1 [u'(x) - u'_h(x)]v'_h(x)dx = 0 \quad \text{für alle } v_h \in V_h,$$

folgt

$$\int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx = \int_0^1 [w'(x) - w'_h(x)][u'(x) - u'_h(x)] dx.$$

Die Anwendung der Cauchy–Schwarz–Ungleichung liefert

$$\int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx \leq \left(\int_0^1 [w'(x) - w'_h(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 [u'(x) - u'_h(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Mit der Fehlerabschätzung (3.31) der Näherungslösung u_h und mit der Abschätzung des Interpolationsfehlers $w - I_h w$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx &\leq \frac{1}{3} h^2 \left(\int_0^1 [w''(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 [u''(x)]^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{3} h^2 \left(\int_0^1 [u(x) - I_h u]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 [u''(x)]^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Fehlerabschätzung

$$\int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx \leq \frac{1}{9} h^4 \int_0^1 [u''(x)]^2 dx. \quad (3.34)$$

3.4 Aufgaben

3.1. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) = -2x \quad \text{für } x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 2/3, \quad u'(1) = 0.$$

- a. Man leite die Variationsformulierung für das Randwertproblem her.
- b. Man diskretisiere das Randwertproblem mit stückweise linearen finiten Elementen. Dabei verwende man die Maschenweite $h = 1/2$ sowie eine Fortsetzung $u_g(x)$ mit $u(x) = u_0(x) + u_g(x)$, $u_g(-1) = 2/3$. Man gebe das resultierende lineare Gleichungssystem sowie die zugehörige Lösung an.

3.2. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) = -2 \quad \text{für } x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 9/4, \quad u'(1) = 1.$$

Man diskretisiere das Problem mit dem Finite Differenzen Verfahren mit einer Schrittweite $h = 1/2$. Man leite das lineare Gleichungssystem her und gebe die Näherungslösung an.

3.3. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (-1, 1), \quad u'(-1) = 1, \quad u'(1) = 1.$$

Man diskretisiere das Problem mit dem Finiten Differenzen Verfahren. Man diskutiere die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems und begründe die jeweiligen Aussagen.

3.4. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) + u(x) = x^2 - 2 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

- a. Man leite die Variationsformulierung für das Randwertproblem her.
- b. Man diskretisiere das Randwertproblem mit stückweise linearen finiten Elementen, dabei verwende man die Maschenweite $h = 1/4$. Weiters verwende man eine lineare Fortsetzung $u_g(x)$ mit $u(x) = u_0(x) + u_g(x)$ und $u_g(1) = 1$. Man leite das resultierende lineare Gleichungssystem her und gebe die zugehörige Lösung an.

3.5. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) + xu'(x) + u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 1, \quad u'(1) + u(1) = 1.$$

Man diskretisiere das Problem mit dem Finiten Differenzen Verfahren und gebe das resultierende lineare Gleichungssystem an.

3.6. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) + u(x) = (x - 1/2)^2 - 2 \quad \text{für } x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 9/4, \quad u(1) = 1/4.$$

Man diskretisiere das Problem mit dem Finiten Differenzen Verfahren mit der Schrittweite $h = 1/2$. Man leite das lineare Gleichungssystem her und gebe die Näherungslösung an.

3.7. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) + u(x) = (x + 1)^2 - 2 \quad \text{für } x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 4.$$

- a. Man leite die Variationsformulierung mit den zugehörigen Funktionenräumen für das Randwertproblem her.
- b. Man diskretisiere das Randwertproblem mit stückweise linearen finiten Elementen, dabei verwende man die Maschenweite $h = 1/2$. Weiters verwende man eine lineare Fortsetzung $u_g(x)$ mit $u(x) = u_0(x) + u_g(x)$ und $u_g(-1) = 0$, $u_g(1) = 4$. Man leite das resultierende lineare Gleichungssystem her und gebe die zugehörige Lösung an.

3.8. Man bestimme eine Darstellung der Lösung des Randwertproblems

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (1, 2), \quad u(1) = 1, \quad u(2) = 2,$$

mit Hilfe der Greenschen Funktion.

3.9. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) + xu(x) = x^3/2 - 1 \quad \text{für } x \in (1/2, 2), \quad u(1/2) = 1/8, \quad u(2) + u'(2) = 4.$$

Man diskretisiere das Problem mit dem Finiten Differenzen Verfahren mit der Schrittweite $h = 1/2$. Man leite das lineare Gleichungssystem her und gebe die Näherungslösung an.

3.10. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-u''(x) + (1 + x^2)u(x) = 0 \quad \text{für } x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 2, \quad u(1) = -1.$$

- a. Man transformiere das Randwertproblem auf eines mit homogenen Randdaten.
- b. Man leite die Variationsformulierung mit den zugehörigen Funktionenräumen für das transformierte Randwertproblem her.
- c. Man diskretisiere das transformierte Randwertproblem mit stückweise linearen finiten Elementen, dabei verwende man die Maschenweite $h = 1/2$. Man leite das resultierende lineare Gleichungssystem her und gebe die zugehörige Lösung an.

3.11. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

bestimme man die Greensche Funktion. Wie lautet die Lösung des Randwertproblems für $f(x) = 1$?

3.12. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) + (1 + x)u(x) = 0 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

bestimme man das lineare Gleichungssystem, welches durch Anwendung der Finiten Differenzen Methode mit einer konstanten Schrittweite $h = 1/4$ entsteht.

3.13. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

bestimme man das lineare Gleichungssystem, welches durch Anwendung einer Finiten Elemente Methode mit stückweise linearen Ansatzfunktionen und einer konstanten Maschenweite $h = 1/2$ entsteht. Wie lautet die Näherungslösung in $x = 0$ und in $x = 1/4$.

3.14. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) - u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, \pi), \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0$$

bestimme man die Greensche Funktion.

3.15. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = 1 - x \quad \text{für } x \in (0, 2), \quad u(0) = 0, \quad u(2) = 0$$

bestimme man das lineare Gleichungssystem, welches durch Anwendung einer Finiten Elemente Methode mit stückweise linearen Ansatzfunktionen und einer konstanten Maschenweite $h = 1/4$ entsteht. Man begründe, warum das Gleichungssystem für jede beliebige konstante Maschenweite h immer eindeutig lösbar ist.

3.16. Man betrachte das Randwertproblem

$$-u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

a. Man berechne einen Wert a , für den gilt

$$e_h := \int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx \leq ah^4,$$

wobei u_h die Finite Elemente Näherungslösung mit linearen Basisfunktionen und einer konstanten Maschenweite h ist.

b. Wie klein muß man h wählen, so daß $e_h \leq 10^{-4}$ gilt?

3.17.

a. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$-u''(x) - 9u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

b. Man verwende finite Differenzen für die Diskretisierung des Randwertproblems

$$-u''(x) - 9u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit einer Schrittweite $h = 1/3$ und gebe das resultierende lineare Gleichungssystem an.

c. Diskutieren Sie die Lösbarkeit des resultierenden linearen Gleichungssystems und begründen Sie Ihre Aussage.

3.18. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0$$

bestimme man das lineare Gleichungssystem, welches durch Anwendung einer Finiten Elemente Methode mit stückweise linearen Ansatzfunktionen und einer konstanten Maschenweite $h = 1/3$ entsteht. Man gebe die Näherungslösung an.

3.19. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) - u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

bestimme man die Greensche Funktion.

3.20. Man berechne die Lösung des Randwertproblems

$$-u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) - u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

3.21. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) - u'(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

bestimme man die Greensche Funktion. Man beachte, daß die Bilinearform der Differentialgleichung nicht symmetrisch ist.

3.22. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) + u'(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

bestimme man die Greensche Funktion. Man beachte, daß die Bilinearform der Differentialgleichung nicht symmetrisch ist.

3.23.

a. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} u(x) \right) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

b. Man bestimme die Greensche Funktion zum Randwertproblem

$$-xu''(x) - u'(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (1, e), \quad u(1) = u(e) = 0.$$

Dabei ist e die Eulersche Zahl mit $\ln e = 1$.

c. Man bestimme die Lösung des Randwertproblems

$$-xu''(x) - u'(x) = 1 \quad \text{für } x \in (1, e), \quad u(1) = u(e) = 0.$$

3.24. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-xu''(x) - u'(x) = 1 \quad \text{für } x \in (1, 2), \quad u(1) = u(2) = 0$$

sowie die Stützstellen $x_k = 1 + k/3$ für $k = 0, 1, 2, 3$.

a. Geben Sie die zugehörige Variationsformulierung an.

b. Geben Sie das lineare Gleichungssystem an, welches bei Diskretisierung mit stückweise linearen Basisfunktionen entsteht.

c. Bestimmen Sie die Näherungslösung $u_h(x)$ in $x = 5/3$.

3.25. Man bestimme die Lösung des Randwertproblems

$$-\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} u(x) \right] = 1 \quad \text{für } x \in (1, 2), \quad u(1) = 0, \quad \frac{d}{dx} u(x)|_{x=2} = 0.$$

3.26. Für die Lösung des Randwertproblems

$$-u''(x) - 4u'(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

betrachte man ein finites Differenzenverfahren mit einer global gleichmässigen Schrittweite $h = 1/2$. Für die Diskretisierung der Ableitung 2. Ordnung verwende man einen symmetrischen Differenzenquotienten, während man für die Ableitung 1. Ordnung sowohl den vor- als auch den rückwärtigen Differenzenquotienten betrachte. Man begründe, welcher Differenzenquotient für die Berechnung der Näherungslösung verwendet werden sollte.

3.27. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) + \alpha u(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

diskutiere man die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. Man begründe die jeweiligen Antworten.

3.28. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-(a(x)u'(x))' = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit einer gegebenen Funktion $a(x) \geq a_0 > 0$.

- a. Man gebe die zugehörige Variationsformulierung an.
- b. Es sein nun $a(x) = 1+x$. Man berechne die Matrix, die bei der Diskretisierung der Variationsformulierung mit stückweise linearen finiten Elementen mit der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ entsteht.

3.29. Man betrachte das Randwertproblem

$$-u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- a. Man gebe das Gleichungssystem an, das durch die Diskretisierung des Randwertproblems mit Hilfe des Finite Elemente Verfahrens unter Verwendung stückweise linearer Basisfunktionen mit einer Schrittweite $h = 0.5$ entsteht.
- b. Man bestimme eine Näherungslösung durch Lösung des linearen Gleichungssystems.
- c. Man skizziere die so erhaltene Näherungslösung.

3.30. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) + (1+x)u(x) = x^2 \quad \text{für } x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 1, u(1) = 2$$

bestimme man das lineare Gleichungssystem, das durch Anwendung des Finite Differenzenverfahrens mit der konstanten Maschenweite $h = 0.5$ entsteht.

3.31. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-(a(x)u'(x))' + u(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

mit einer gegebenen Funktion $a(x) \geq a_0 > 0$.

- a. Man gebe die zugehörige Variationsformulierung an.
- b. Es sein $a(x) = 1 + x$. man berechne die Matrix, die bei der Diskretisierung der Variationsformulierung mit stückweise linearen finiten Elementen mit der Schrittweite $h = 1$ entsteht.
- c. Man bestimme die Näherungslösung für $h = 1$.

3.32. Man bestimme die Lösung des Randwertproblems

$$-((1+x)u'(x))' = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

3.33. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) + xu(x) = x^2 \quad \text{für } x \in (0, 2), \quad u(0) = 2, \quad u(2) = -1$$

bestimme man das lineare Gleichungssystem, das durch Anwendung des Finiten Differenzen Verfahrens mit der konstanten Maschenweite $h = 1$ entsteht. Man skizziere die zugehörige Näherungslösung.

3.34. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0$$

bestimme man die zugehörige Greensche Funktion.

3.35. Man bestimme die Lösung des Randwertproblems

$$-\left(\frac{u'(x)}{1+x}\right)' = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

3.36. Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

bestimme man die zugehörige Greensche Funktion.

3.37. Gegeben ist das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

- a. Wie lautet die zugehörige Variationsformulierung?
- b. Welche Bedingung muß die Funktion $f(x)$ erfüllen, damit eine Lösung des Randwertproblems existiert?
- c. Wie lautet das lineare Gleichungssystem bei einer Diskretisierung mit stückweise linearen Basisfunktionen und einer Schrittweite $h = 1$. Wie lautet die Vorschrift zur Berechnung des Lastvektors?
- d. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit das Gleichungssystem lösbar ist? In diesem Fall gebe man die Lösung an!

3.38. Man bestimme die Lösung des Randwertproblems

$$-\left(\frac{u'(x)}{1+x}\right)' = x \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u'(0) = u(1) = 0.$$

Kapitel 4

Anfangs–Randwertprobleme

Bisher haben wir in Kapitel 2 Anfangswertprobleme und in Kapitel 3 Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachtet. Lösungen partieller Differentialgleichungen zur Beschreibung physikalischer Vorgänge sind aber meist Funktionen in Zeit und Ort. Als Beispiel betrachten wir die im Raum eindimensionale Wärmeleitgleichung, d.h. gesucht ist eine Funktion $u(t, x)$ als Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für } x \in (0, 1), t > 0, \quad (4.1)$$

welche die Randbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \text{für } t > 0 \quad (4.2)$$

und die Anfangsbedingung

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in (0, 1) \quad (4.3)$$

erfüllt. Dabei ist die Kompatibilität

$$u_0(0) = u_0(1) = 0$$

vorauszusetzen. Im folgenden soll eine Approximation der partiellen Differentialgleichung (4.1) durch finite Differenzen sowohl in der Zeit als auch im Ort betrachtet werden. Für eine Zeitschrittweite $\tau > 0$ seien Zeitschritte

$$t_k := k\tau \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

bestimmt. Die Taylor–Entwicklung

$$u(t_{k+1}, x) = u(t_k + \tau, x) = u(t_k, x) + \tau u_t(t_k, x) + \frac{1}{2}\tau^2 u_{tt}(\tilde{t}_k, x)$$

mit einer Zwischenwertstelle $\tilde{t}_k \in (t_k, t_{k+1})$ impliziert mit

$$u_t(t_k, x) = \frac{u(t_{k+1}, x) - u(t_k, x)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \quad (4.4)$$

eine Approximation der Zeitableitung in t_k durch einen vorwärtigen Differenzenquotienten. Entsprechend ergibt sich aus der Taylor-Entwicklung

$$u(t_k, x) = u(t_{k+1} - \tau, x) = u(t_{k+1}, x) - \tau u_t(t_{k+1}, x) + \frac{1}{2} \tau^2 u_{tt}(\hat{t}_k, x)$$

mit einer zweiten Zwischenwertstelle $\hat{t}_k \in (t_k, t_{k+1})$ die Darstellung

$$u_t(t_{k+1}, x) = \frac{u(t_{k+1}, x) - u(t_k, x)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau), \quad (4.5)$$

d.h. eine Approximation der Zeitableitung in t_{k+1} durch einen rückwärtigen Differenzenquotienten. Durch die Konvexkombination der vorwärtigen und rückwärtigen Differenzenquotienten (4.4) und (4.5) ergibt sich für $\sigma \in [0, 1]$ unter Berücksichtigung der partiellen Differentialgleichung (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{u(t_{k+1}, x) - u(t_k, x)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) &= \sigma u_t(t_{k+1}, x) + (1 - \sigma) u_t(t_k, x) \\ &= \sigma [f(t_{k+1}, x) + u_{xx}(t_{k+1}, x)] + (1 - \sigma) [f(t_k, x) + u_{xx}(t_k, x)]. \end{aligned}$$

Zur Approximation der Ortsableitung zu einem festen Zeitpunkt t betrachten wir wie in Kapitel 3 die Taylor-Entwicklungen

$$u(t, x + h) = u(t, x) + hu_x(t, x) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(t, x) + \frac{1}{6}h^3u_{xxx}(t, x) + \mathcal{O}(h^4)$$

und

$$u(t, x - h) = u(t, x) - hu_x(t, x) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(t, x) - \frac{1}{6}h^3u_{xxx}(t, x) + \mathcal{O}(h^4).$$

Daraus folgt

$$u_{xx}(t, x) = \frac{u(t, x + h) - 2u(t, x) + u(t, x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) &= \\ &= \sigma \left[f(t + \tau, x) + \frac{u(t + \tau, x + h) - 2u(t + \tau, x) + u(t + \tau, x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \right] \\ &\quad + (1 - \sigma) \left[f(t, x) + \frac{u(t, x + h) - 2u(t, x) + u(t, x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \right]. \end{aligned}$$

Für eine im Ort x viermal und eine in der Zeit t zweimal stetig differenzierbare Lösung $u(t, x)$ des Anfangsrandwertproblems (4.1)–(4.3) gilt also

$$\begin{aligned} \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} &= \\ &= \sigma \frac{u(t + \tau, x + h) - 2u(t + \tau, x) + u(t + \tau, x - h)}{h^2} \\ &\quad - (1 - \sigma) \frac{u(t, x + h) - 2u(t, x) + u(t, x - h)}{h^2} \\ &= \sigma f(t + \tau, x) + (1 - \sigma) f(t, x) + \mathcal{O}(\tau) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

In den Stützstellen $x_i = ih$ für $i = 0, 1, \dots, n$ mit einer Ortsschrittweite $h = 1/n$ sei

$$u_i^k \approx u(t_k, x_i)$$

die Näherungslösung zur Zeit t_k . Aus (4.6) ergibt sich dann das finite Differenzenschema

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - \sigma \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} - (1 - \sigma) \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} = \sigma f_i^{k+1} + (1 - \sigma) f_i^k$$

für $i = 1, \dots, n - 1$. Für $k = 0$ folgt aus der Anfangsbedingung (4.3)

$$u_i^0 = u_0(x_i) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n,$$

weil aus der Randbedingung (4.2)

$$u_0^k = u_n^k = 0 \quad \text{für alle } k > 0$$

folgt. Mit der Steifigkeitsmatrix A_n , siehe (3.15), ist also

$$\frac{1}{\tau} [\underline{u}^{k+1} - \underline{u}^k] + \sigma A_n \underline{u}^{k+1} + (1 - \sigma) A_n \underline{u}^k = \sigma \underline{f}^{k+1} + (1 - \sigma) \underline{f}^k. \quad (4.7)$$

Insbesondere für $\sigma = 0$ ergibt sich mit

$$\underline{u}^{k+1} = \underline{u}^k + \tau [\underline{f}^k - A_n \underline{u}^k] \quad (4.8)$$

ein explizites Schema, während für $\sigma = 1$ ein rein implizites Schema folgt,

$$(I + \tau A_n) \underline{u}^{k+1} = \underline{u}^k + \tau \underline{f}^{k+1}. \quad (4.9)$$

Während beim expliziten Verfahren (4.8) die Näherungslösung \underline{u}^{k+1} allein durch eine Auswertung der rechten Seite berechnet werden kann, ist beim impliziten Verfahren (4.9) in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Generell stellt sich die Frage, inwieweit die Wahl des Parameters σ und die Festlegung der Zeit- und Ortsschrittweiten τ und h die Eigenschaften des Näherungsverfahrens, insbesondere die Stabilität beeinflussen. Hierzu betrachten wir eine homogene partielle Differentialgleichung (4.1) mit $f(t, x) = 0$ und das dann aus (4.7) resultierende lineare Gleichungssystem

$$(I + \sigma \tau A_n) \underline{u}^{k+1} = (I - (1 - \sigma) \tau A_n) \underline{u}^k,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \underline{u}^{k+1} &= (I + \sigma \tau A_n)^{-1} [I - (1 - \sigma) \tau A_n] \underline{u}^k \\ &= [I - \tau (I + \sigma \tau A_n)^{-1} A_n] \underline{u}^k \\ &= [I - \tau (I + \sigma \tau A_n)^{-1} A_n]^{k+1} \underline{u}^0. \end{aligned}$$

Entscheidend für die die Stabilität des Verfahrens ist also das Verhalten der Eigenwerte σ_k der Fehlerfortpflanzungsmatrix

$$\Sigma_n := I - \tau(I + \sigma\tau A_n)^{-1}A_n.$$

Nach (3.22) sind die Eigenwerte von A_n gegeben durch

$$\lambda_k = 4n^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1.$$

Für die Eigenwerte von Σ_n ergibt sich dann

$$\sigma_k = 1 - \frac{\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1.$$

Für ein stabiles Verfahren muß die Bedingung

$$|\sigma_k| \leq 1$$

für alle Eigenwerte der Fehlerfortpflanzungsmatrix Σ_n erfüllt sein, d.h.

$$-1 \leq 1 - \frac{\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \leq 1.$$

Insbesondere muß also

$$\frac{\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \leq 2$$

gelten, was zu

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau n^2 \sin^2(k\pi/2n)}$$

äquivalent ist. Für

$$\sigma \geq \frac{1}{2}$$

liegt also ein unbedingt stabiles Verfahren vor, d.h. Stabilität folgt unabhängig von der konkreten Wahl der Zeit- und Ortsschrittweiten τ und h . Für das explizite Verfahren mit $\sigma = 0$ folgt die Stabilität aus der Bedingung

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau n^2 \sin^2(k\pi/2n)} \leq 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n-1,$$

d.h.

$$2\tau n^2 \sin^2(k\pi/2n) \leq 1.$$

Insbesondere für $k = n-1$ ergibt sich mit der Ortsschrittweite $h = 1/n$ die Forderung

$$\tau \leq \frac{1}{2} h^2,$$

d.h. die Zeitschrittweite ist in Abhängigkeit der Ortsschrittweite hinreichend klein zu wählen. Eine solche Bedingung bezeichnet man nach Courant, Levy und Friedrich als CFL-Bedingung.

Kapitel 5

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Das Gesetz der Massenerhaltung besagt, daß die Masse eines beliebigen zeitabhängigen Kontrollvolumens $\omega(t) \subset \mathbb{R}^d$ konstant ist, d.h. mit der Massendichte $\varrho(t, x)$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \varrho(t, x(t)) dx(t) = 0. \quad (5.1)$$

Durch die Anwendung des Reynoldsen Transporttheorems, d.h. durch Vertauschen von Differentiation und Integration, folgt aus (5.1) die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, x) + \operatorname{div}_x(\varrho(t, x) \underline{v}(t, x)) = 0 \quad (5.2)$$

mit der Geschwindigkeit $\underline{v}(t, x)$ eines Partikels in $x \in \mathbb{R}^d$. Für $t = 0$ sei eine Anfangsbedingung

$$\varrho(0, x) = \varrho_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \quad (5.3)$$

gegeben. Insbesondere für $d = 1$ und $x \in \mathbb{R}$ sowie für eine konstante Geschwindigkeit $v(t, x) = a$ ergibt sich aus (5.2) die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, x) + a \frac{\partial}{\partial x} \varrho(t, x) = 0. \quad (5.4)$$

Die partielle Differentialgleichung (5.4) kann als Richtungsableitung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial x} \varrho(t, x) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, x) + a \frac{\partial}{\partial x} \varrho(t, x) = 0$$

interpretiert werden, d.h. $\varrho(t, x)$ ist in Richtung $(1, a)^\top$ konstant. Die Lösung $\varrho(t, x)$ ist also entlang einer Geraden

$$x - at = \text{konstant}$$

konstant. Diese Geraden heißen Charakteristiken. Die Lösung $\varrho(t, x)$ ist konstant auf jeder Charakteristik, d.h. es gilt

$$\varrho(t, x) = \tilde{\varrho}(x - at),$$

wobei die Funktion $\tilde{\varrho}$ durch die Anfangsbedingung (5.3) bestimmt ist. Insbesondere für $t = 0$ ist

$$\tilde{\varrho}(x) = \varrho(0, x) = \varrho_0(x),$$

d.h. wir erhalten als Lösung

$$\varrho(t, x) = \tilde{\varrho}(x - at) = \varrho_0(x - at).$$

Beispiel 5.1 *Die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, x) + a \frac{\partial}{\partial x} \varrho(t, x) = 0, \quad \varrho(0, x) = \sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

ist gegeben durch

$$\varrho(t, x) = \sin(x - at).$$

Allgemein betrachtet wird eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung einer Funktion $u(t, x)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(u(t, x)) = f(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (5.5)$$

Dabei ist $F(u)$ eine gegebene Funktion. Zum Beispiel wird durch

$$F(u) = \frac{1}{2} u^2$$

die Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = f(t, x) \quad (5.6)$$

beschrieben. Insbesondere für $f(t, x) = 0$ sprechen wir von einer Erhaltungsgleichung,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(u(t, x)) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (5.7)$$

Für die Lösung der allgemeinen Erhaltungsgleichung (5.7) soll hier das Charakteristikenverfahren behandelt werden. Gesucht sind die Charakteristiken \mathcal{C} , d.h. Kurven in der (t, x) -Ebene, entlang derer die Lösung $u(t, x)$ konstant ist. Für einen Parameter $s \in \mathbb{R}_+$ und einen Anfangspunkt $\tau \in \mathbb{R}$ kann eine Kurve in der Ebene durch eine Parametrisierung

$$t = T(s, \tau), \quad x = X(s, \tau)$$

mit einem Anfangspunkt

$$t = T(0, \tau) = 0, \quad x = X(0, \tau) = \tau$$

dargestellt werden. Für die Funktion $u(t, x)$ ergibt sich dann die Darstellung

$$u(t, x) = u(T(s, \tau), X(s, \tau)) =: U(s, \tau).$$

Da die Lösung $u(t, x)$ entlang einer Charakteristik \mathcal{C} konstant sein soll, muß entlang einer Charakteristik die Ableitung nach dem Parameter s verschwinden, d.h. es muss

$$\frac{d}{ds}U(s, \tau) = 0$$

gelten. Mit der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s, \tau) &= \frac{d}{ds}u(T(s, \tau), X(s, \tau)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(t, x)\frac{d}{ds}T(s, \tau) + \frac{\partial}{\partial x}u(t, x)\frac{d}{ds}X(s, \tau) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + F'(u(t, x))\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) = 0, \end{aligned}$$

falls

$$\frac{d}{ds}T(s, \tau) = 1, \quad \frac{d}{ds}X(s, \tau) = F'(u(t, x)) = F'(U(s, \tau))$$

erfüllt ist. Zu lösen ist also ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d}{ds}T(s, \tau) = 1, \quad \frac{d}{ds}X(s, \tau) = F'(U(s, \tau)), \quad \frac{d}{ds}U(s, \tau) = 0, \quad (5.8)$$

wobei noch geeignete Anfangsbedingungen für $s = 0$ zu formulieren sind,

$$T(0, \tau) = 0, \quad X(0, \tau) = \tau, \quad U(0, \tau) = U(T(0, \tau), X(0, \tau)) = u(0, \tau) = u_0(\tau).$$

Die Lösungen von (5.8) sind also Funktionen abhängig vom Kurvenparameter $s \in \mathbb{R}_+$ und vom Anfangspunkt $\tau \in \mathbb{R}$. Für das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{ds}T(s, \tau) = 1, \quad T(0, \tau) = 0$$

ergibt sich die Lösung

$$t = T(s, \tau) = s.$$

Für das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{ds}U(s, \tau) = 0, \quad U(0, \tau) = u_0(\tau)$$

ergibt sich die vom Anfangspunkt $\tau \in \mathbb{R}$ abhängige Lösung

$$U(s, \tau) = u_0(\tau).$$

Zu lösen bleibt

$$\frac{d}{ds}X(s, \tau) = F'(U(s, \tau)) = F'(u_0(\tau)), \quad X(0, \tau) = \tau$$

mit der Lösung

$$X(s, \tau) = F'(u_0(\tau))s + \tau.$$

Mit $s = t$ sind die Charakteristiken gegeben durch die Geraden

$$x = X(t, \tau) = F'(u_0(\tau))t + \tau,$$

auf denen eine konstante Lösung durch den Anfangswert $u_0(\tau)$ beschrieben wird.

Beispiel 5.2 Für $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ erhalten wir die Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) = 0$$

mit $F'(u) = u$. Dann folgt

$$U(t, \tau) = u_0(\tau)$$

entlang der Geraden

$$x = X(t, \tau) = F'(u_0(\tau))t + \tau = u_0(\tau)t + \tau.$$

Wir betrachten nun als Anfangsbedingung

$$u_0(\tau) = \sin(\pi\tau) \quad \text{für } \tau \in [0, 2].$$

Für die Charakteristiken ergeben sich dann die Geraden

$$x = X(t, \tau) = \sin(\pi\tau)t + \tau \quad \text{für } \tau \in [0, 2].$$

Offenbar ist

$$x'(t) = \sin(\pi\tau)$$

und somit folgt

$$x'(t) > 0 \quad \text{für } \tau \in (0, 1), \quad x'(t) < 0 \quad \text{für } \tau \in (1, 2), \quad x'(t) = 0 \quad \text{für } \tau = 0, 1, 2.$$

Damit schneiden die Geraden

$$x = X(t, \tau) = \sin(\pi\tau)t + \tau \quad \text{für } \tau \in (0, 1)$$

jene Gerade für $\tau = 1$,

$$x = X(t, 1) = 1,$$

jeweils für ein $t^* = t^*(\tau) > 0$ mit

$$\sin(\pi\tau)t^* + \tau = 1, \quad t^*(\tau) = \frac{1 - \tau}{\sin(\pi\tau)}.$$

Nur für

$$t < t_{\min}^* := \min_{\tau \in [0,2]} t_{\min}^*(\tau) = \min_{\tau \in [0,2]} \frac{1 - \tau}{\sin(\pi\tau)} = \frac{1}{\pi} \approx 0.3183$$

existiert dann eine klassische Lösung, welche durch das Charakteristikenverfahren konstruiert werden kann.

Die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems hängt eng zusammen mit der Auflösbarkeit der Gleichung

$$x = X(t, \tau) = F'(u_0(\tau))t + \tau$$

nach $\tau = \tau(t, x)$. Dann kann die Lösung

$$U(t, \tau) = u_0(\tau) = u_0(\tau(t, x))$$

als Funktion in (t, x) dargestellt werden. Dies ist eine Anwendung des Satzes über implizite Funktionen.

Satz 5.1 (Satz über implizite Funktionen) Seien $g(t, x; \tau)$ und $g_\tau(t, x; \tau)$ stetige Funktionen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$. Sei $(t_0, x_0; \tau_0) \in G$ mit

$$g(t_0, x_0; \tau_0) = 0, \quad g_\tau(t_0, x_0; \tau_0) \neq 0.$$

Dann kann die Gleichung

$$g(t, x; \tau) = 0$$

in einem Kreis um (t_0, x_0) nach $\tau = \tau(t, x)$ aufgelöst werden, d.h. es gilt

$$g(t, x; \tau(t, x)) = 0.$$

Der Satz über implizite Funktionen wird nun zur Bestimmung von $\tau = \tau(t, x)$ als Lösung der Gleichung

$$g(t, x; \tau) = F'(u_0(\tau))t + \tau - x = 0$$

angewandt. Offenbar ist

$$g_\tau(t, x; \tau) = F''(u_0(\tau))u_0'(\tau)t + 1$$

und für $t = 0$ und $x = \tau$ folgt

$$g(0, \tau; \tau) = 0, \quad g_\tau(0, \tau; \tau) = 1.$$

Für eine konvexe Funktion $F(u)$ mit

$$F''(u) \geq 0$$

und eine monoton wachsende Funktion $u_0(\tau)$ mit

$$u'_0(\tau) \geq 0$$

folgt für $t > 0$

$$g_\tau(t, x; \tau) = F''(u_0(\tau)) u'_0(\tau) t + 1 > 1,$$

Dann kann die Gleichung

$$g(t, x; \tau) = F'(u_0(\tau)) t + \tau - x$$

global für alle $t > 0$ nach

$$\tau = \tau(t, x)$$

aufgelöst werden. Im Gegensatz hierzu existiert für $F''(u) > 0$ und eine streng monoton fallende Anfangsbedingung mit $u'_0(\tau) < 0$ ein Zeitpunkt

$$t = -\frac{1}{F''(u_0(\tau))u'_0(\tau)} > 0,$$

für den die Auflösung nach $\tau = \tau(t, x)$ nicht mehr möglich. Existiert das Minimum

$$t^* = \min_{\tau \in \mathbb{R}} \frac{1}{-F''(u_0(\tau))u'_0(\tau)} > 0,$$

so wird zum Zeitpunkt $t = t^*$ die Auflösungsbedingung erstmals verletzt. $u(t, x)$ wird für $t > t^*$ als Funktion mehrdeutig und dies ist nicht mehr physikalisch sinnvoll. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit der Betrachtung eines allgemeineren Lösungsbegriffes.

Betrachtet wird wieder eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in der Form (5.5),

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(u(t, x)) = f(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Sei $u(t, x)$ eine klassische, d.h. eine stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (5.5), dann gilt die partielle Differentialgleichung punktweise für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$. Für eine unstetige Lösung sind die partiellen Ableitungen nicht erklärt, deshalb betrachten wir eine schwache Formulierung der partiellen Differentialgleichung.

Die Multiplikation der partiellen Differentialgleichung mit einer geeignet gewählten Testfunktion $\varphi(t, x)$ und anschließende Integration ergibt die Gleichheit

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(u(t, x)) \right] \varphi(t, x) dx dt = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(t, x) \varphi(t, x) dx dt.$$

Für die Existenz der uneigentlichen Integrale ist vorauszusetzen, daß die Testfunktion $\varphi(t, x)$ außerhalb eines beschränkten Bereiches identisch verschwindet, d.h. für ein geeignet gewähltes $R \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(t, x) = 0 \quad \text{für } t \geq R, |x| \geq R.$$

Mit partieller Integration folgt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \varphi(t, x) dt &= \int_0^R \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \varphi(t, x) dt \\ &= u(t, x) \varphi(t, x) \Big|_{t=0}^R - \int_0^R u(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) dt \\ &= -u_0(x) \varphi(0, x) - \int_{\mathbb{R}_+} u(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) dt \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} F(u(t, x)) \varphi(t, x) dx &= \int_{-R}^R \frac{\partial}{\partial x} F(u(t, x)) \varphi(t, x) dx \\ &= F(u(t, x)) \varphi(t, x) \Big|_{x=-R}^R - \int_{-R}^R F(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} F(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) dx. \end{aligned}$$

Dies motiviert die folgende Definition einer schwachen Lösung des Anfangswertproblems (5.5).

Definition 5.1 Eine integrierbare Funktion $u(t, x)$ heißt schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(u(t, x)) = f(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wenn für jede beliebig oft differenzierbare Testfunktion $\varphi(t, x)$ mit beschränktem Träger die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left[u(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + F(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) + f(t, x) \varphi(t, x) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx = 0$$

erfüllt ist.

Die Definition einer schwachen Lösung ist eine Verallgemeinerung des klassischen Lösungsbegriffs. Nach Konstruktion ist jede stetig differenzierbare Lösung von (5.5) auch Lösung der Variationsformulierung und somit auch schwache Lösung. Andererseits, ist die schwache Lösung wenigstens stückweise stetig differenzierbar, so ist die schwache Lösung in den Stetigkeitspunkten auch klassische Lösung des Anfangswertproblems. Zu untersuchen bleibt jedoch das Verhalten einer schwachen Lösung entlang einer möglichen Unstetigkeitskurve.

Hierfür betrachten wir die Variationsformulierung des Anfangswertproblems (5.5) für eine Testfunktion $\varphi(t, x)$ mit $\varphi(0, x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left[u(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + F(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) + f(t, x) \varphi(t, x) \right] dx dt = 0. \quad (5.9)$$

Sei

$$\mathcal{G} := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, R), x \in (-R, +R) \right\}$$

ein zweidimensionales beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\mathcal{G}$ und es gelte $\varphi(t, x) = 0$ für $(t, x) \in \partial\mathcal{G}$. Im Falle einer unstetigen Lösung $u(t, x)$ nehmen wir an, daß diese Unstetigkeitslinie durch eine glatte Kurve $\Sigma = (t, \sigma(t))$ in \mathcal{G} gegeben ist. Dann sind

$$\mathcal{G}_- := \left\{ (t, x) \in \mathcal{G} : x < \sigma(t) \right\}$$

und

$$\mathcal{G}_+ := \left\{ (t, x) \in \mathcal{G} : x > \sigma(t) \right\}$$

die Teilbereiche von \mathcal{G} , in denen die schwache Lösung als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird, siehe Abbildung 5.1. Die Einschränkungen $u_{\pm}(t, x)$ der schwachen Lösung $u(t, x)$ auf die Teilbereiche \mathcal{G}_{\pm} sind dort also auch klassische Lösung der partiellen Differentialgleichung in (5.5). Aus der Variationsformulierung (5.9) folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{G}} \left[u(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + F(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) + f(t, x) \varphi(t, x) \right] dx dt \\ &= \int_{\mathcal{G}_+} \left[u_+(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + F(u_+(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) + f(t, x) \varphi(t, x) \right] dx dt \\ &\quad + \int_{\mathcal{G}_-} \left[u_-(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + F(u_-(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) + f(t, x) \varphi(t, x) \right] dx dt. \end{aligned}$$

Für $(t, x) \in \partial\mathcal{G}_{\pm}$ bezeichnet

$$n^{\pm}(t, x) = \begin{pmatrix} n_t^{\pm}(t, x) \\ n_x^{\pm}(t, x) \end{pmatrix}$$

den äußeren Normalenvektor bezüglich \mathcal{G}_{\pm} . Aus

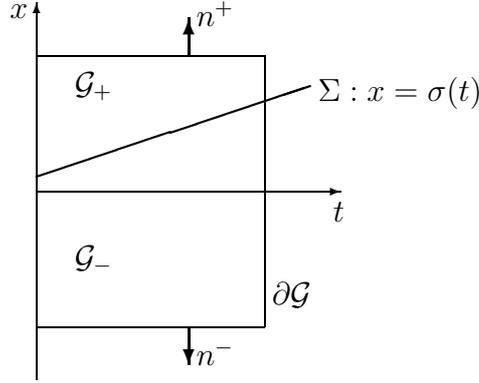
$$\int_{\mathcal{G}_{\pm}} \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) dx dt = \int_{\partial\mathcal{G}_{\pm}} n_t^{\pm}(t, x) v(t, x) ds_{(t,x)}$$

folgt die Formel der partiellen Integration,

$$\int_{\mathcal{G}_{\pm}} w(t, x) \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) dx dt = \int_{\partial\mathcal{G}_{\pm}} n_t^{\pm}(t, x) v(t, x) w(t, x) ds_{(t,x)} - \int_{\mathcal{G}_{\pm}} v(t, x) \frac{\partial}{\partial t} w(t, x) dx dt.$$

Entsprechend gilt

$$\int_{\mathcal{G}_{\pm}} w(t, x) \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) dx dt = \int_{\partial\mathcal{G}_{\pm}} n_x^{\pm}(t, x) v(t, x) w(t, x) ds_{(t,x)} - \int_{\mathcal{G}_{\pm}} v(t, x) \frac{\partial}{\partial x} w(t, x) dx dt.$$

Abbildung 5.1: Aufteilung des Integrationsgebietes \mathcal{G} .

Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{G}_+} \left[u_+(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + F(u_+(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) + f(t, x) \varphi(t, x) \right] dx dt \\
&\quad + \int_{\mathcal{G}_-} \left[u_-(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + F(u_-(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) + f(t, x) \varphi(t, x) \right] dx dt \\
&= \int_{\partial \mathcal{G}_+} \left[n_t^+ u_+(t, x) \varphi(t, x) + n_x^+ F(u_+(t, x)) \varphi(t, x) \right] ds_{(t,x)} \\
&\quad - \int_{\mathcal{G}_+} \left[\frac{\partial}{\partial t} u_+(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(u_+(t, x)) - f(t, x) \right] \varphi(t, x) dx dt \\
&\quad + \int_{\partial \mathcal{G}_-} \left[n_t^- u_-(t, x) \varphi(t, x) + n_x^- F(u_-(t, x)) \varphi(t, x) \right] ds_{(t,x)} \\
&\quad - \int_{\mathcal{G}_-} \left[\frac{\partial}{\partial t} u_-(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} F(u_-(t, x)) - f(t, x) \right] \varphi(t, x) dx dt.
\end{aligned}$$

Da die Funktionen $u_{\pm}(t, x)$ in den Bereichen \mathcal{G}_{\pm} klassische Lösungen der partiellen Differentialgleichung sind, entfallen die Gebietsintegrale über \mathcal{G}_{\pm} , d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial \mathcal{G}_+} \left[n_t^+ u_+(t, x) \varphi(t, x) + n_x^+ F(u_+(t, x)) \varphi(t, x) \right] ds_{(t,x)} \\
&\quad + \int_{\partial \mathcal{G}_-} \left[n_t^- u_-(t, x) \varphi(t, x) + n_x^- F(u_-(t, x)) \varphi(t, x) \right] ds_{(t,x)}.
\end{aligned}$$

Wegen $\varphi(t, x) = 0$ für $(t, x) \in \partial \mathcal{G}$ verbleiben nur die Integrale über die Unstetigkeitskurve Σ . Aus der globalen Stetigkeit der Testfunktion $\varphi(t, x)$ folgt dann

$$0 = \int_{\Sigma} \left[\left(n_t^+ u_+(t, x) + n_t^- u_-(t, x) \right) + \left(n_x^+ F(u_+(t, x)) + n_x^- F(u_-(t, x)) \right) \right] \varphi(t, x) ds_{(t,x)}.$$

Entlang der Unstetigkeitskurve Σ sind die äußeren Normalenvektoren bezüglich \mathcal{G}_+ und \mathcal{G}_- entgegengerichtet,

$$n^+(t, x) = -n^-(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in \Sigma.$$

Somit gilt

$$0 = \int_{\Sigma} \left[n_t^- \left(u_-(t, x) - u_+(t, x) \right) + n_x^- \left(F(u_-(t, x)) - F(u_+(t, x)) \right) \right] \varphi(t, x) ds_{(t, x)}$$

für alle Testfunktionen $\varphi(t, x)$. Für einen stetigen Sprung folgt dann

$$n_t^- \left(u_-(t, x) - u_+(t, x) \right) + n_x^- \left(F(u_-(t, x)) - F(u_+(t, x)) \right) = 0 \quad \text{für } (t, x) \in \Sigma.$$

Für den Normalenvektor n^- bezüglich \mathcal{G}_- gilt die Darstellung

$$n^-(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [\sigma'(t)]^2}} \begin{pmatrix} -\sigma'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit folgt

$$\sigma'(t) \left(u_-(t, x) - u_+(t, x) \right) = F(u_-(t, x)) - F(u_+(t, x)) \quad \text{für } (t, x) \in \Sigma$$

bzw.

$$\sigma'(t) [u(t, x)]_{|\Sigma} = [F(u(t, x))]_{|\Sigma} \quad \text{für } (t, x) \in \Sigma. \quad (5.10)$$

Dabei bezeichnet

$$[u(t, x)]_{|\Sigma} := u_+(t, x) - u_-(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in \Sigma$$

den Sprung, und $\sigma'(t)$ die Geschwindigkeit von Σ .

Satz 5.2 Sei $u(t, x)$ in \mathcal{G} eine schwache Lösung des Anfangswertproblems (5.5), und klassische Lösung in \mathcal{G}_{\pm} , welche für $(t, x) \in \Sigma$ einen stetigen Sprung $[u(t, x)]_{|\Sigma}$ besitzt. Dann genügt $u(t, x)$ der Rankine–Hugoniot–Bedingung

$$F(u_+(t, x)) - F(u_-(t, x)) = \sigma'(t) (u_+(t, x) - u_-(t, x)) \quad \text{für } (t, x) \in \Sigma. \quad (5.11)$$

Beispiel 5.3 Wir betrachten das Anfangswertproblem für die Burgers–Gleichung, d.h. für $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ ist

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Für die charakteristischen Kurven ergibt sich

$$x = X(t, \tau) = F'(u_0(\tau))t + \tau = u_0(\tau)t + \tau$$

und somit

$$x(t) = \begin{cases} t + \tau & \text{für } \tau \leq 0, \\ (1 - \tau)t + \tau & \text{für } 0 < \tau \leq 1, \\ \tau & \text{für } \tau > 1. \end{cases}$$

Für $t = 1$ schneiden sich die Charakteristiken im Punkt $(1, 1)$, d.h. eine klassische Lösung existiert nur für $t < 1$. Für $\tau \leq 0$ ist $x = t + \tau$ und somit folgt

$$u(t, x) = 1 \quad \text{für } x - t \leq 0.$$

Für $\tau > 1$ ist $x = \tau$ und somit folgt

$$u(t, x) = 0 \quad \text{für } x > 1.$$

Für $0 < \tau \leq 1$ ist

$$x = (1 - \tau)t + \tau = t - \tau(t - 1), \quad \tau = \frac{x - t}{1 - t} \in (0, 1]$$

und somit

$$u(t, x) = u_0(\tau) = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{(1 - t) - (x - t)}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t} \quad \text{für } \frac{x - t}{1 - t} \in (0, 1].$$

Für $t < 1$ existiert also eine eindeutige stetige Lösung

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq t, \\ \frac{1 - x}{1 - t} & \text{für } t < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Für $t > 1$ kann eine schwache Lösung definiert werden, welche der Rankine-Hugoniot-Bedingung (5.11) genügt. Offensichtlich erfüllen $u_-(t, x) = 1$ und $u_+(t, x) = 0$ für $t > 1$ die partielle Differentialgleichung im klassischen Sinne. Weiter ist

$$u_-(1, x) = 1 \quad \text{für } x \leq 1, \quad u_+(1, x) = 0 \quad \text{für } 1 < x.$$

Aus

$$[u(t, x)]|_{\Sigma} = u_+(t, x) - u_-(t, x) = -1, \quad [F(u(t, x))]|_{\Sigma} = F(u_+(t, x)) - F(u_-(t, x)) = -\frac{1}{2}$$

folgt

$$\sigma'(t) = \frac{[F(u(t, x))]|_{\Sigma}}{[u(t, x)]|_{\Sigma}} = \frac{1}{2}.$$

Mit $\sigma(1) = 1$ folgt für die Unstetigkeitslinie Σ die Darstellung

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}(t + 1).$$

Für $t > 1$ lautet also die schwache Lösung

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \frac{1}{2}(t + 1), \\ 0 & \text{für } x > \frac{1}{2}(t + 1). \end{cases}$$

Man bezeichnet eine solche Lösung auch als Schockwelle, welche sich entlang von Σ formiert.

Beispiel 5.4 Wie betrachten ein Anfangswertproblem mit Verdünnungsfächer,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Die charakteristischen Kurven lauten

$$x(t) = \begin{cases} \tau & \text{für } \tau < 0, \\ t + \tau & \text{für } \tau > 0. \end{cases}$$

Die Lösung lautet also

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > t, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Offenbar erfüllt

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{für } x \leq \frac{1}{2}t \end{cases}$$

sowohl die Burgers-Gleichung als auch die Rankine-Hugoniot-Bedingung. Andererseits definiert für $t > 0$

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > t, \\ \frac{x}{t} & \text{für } 0 < x \leq t, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ebenfalls eine Lösung der Burgers-Gleichung, welche sogar stetig ist, d.h. die Rankine-Hugoniot-Bedingung ist trivial erfüllt. Die Rankine-Hugoniot-Bedingung ist also notwendig für die Existenz schwacher Lösungen, für die Eindeutigkeit wird jedoch eine weitere Bedingung, die sogenannte Entropie-Bedingung, benötigt.

5.1 Aufgaben

5.1. Man finde mit Hilfe der Charakteristikenmethode die Lösung des Cauchy-Problems

$$x \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + y \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = 2u(x, y) + 2(x^2 + y^2),$$

die auf der Einheitskreislinie $x^2 + y^2 = 1$ den konstanten Wert $u(x, y) = 0$ annimmt.

5.2. Man berechne die Lösung der Differentialgleichung

$$x \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + y \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = \frac{2u(x, y)}{1 + \ln(x^2 + y^2)},$$

die auf der Einheitskreislinie $x^2 + y^2 = 1$ den konstanten Wert c annimmt.

5.3. Man löse das folgende Problem

$$u(t, x) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + e^t \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + [u(t, x)]^2 = 0, \quad u(0, x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

5.4. Man löse das folgende Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + x u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 2t, \quad u(0, x) = x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

im Punkt $(1, 1)$ mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

5.5. Man löse das folgende Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + 2u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

5.6. Man löse das folgende Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + 3\sqrt[3]{x^2} \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 2, \quad u(t, 1) = 1 + t, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

5.7. Man löse das folgende Problem

$$(t + 1) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - x \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = x(t + 1), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit der Anfangsbedingung $u(0, x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

5.8. Man bestimme eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{1}{t[u(t,x)]^2} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \frac{1}{x[u(t,x)]^2} \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = -4$$

im ersten Quadranten $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, x > 0\}$ mit den Anfangswerten

$$u(\cos \tau, \sin \tau) = 1, \quad \tau \in [0, \pi/2).$$

5.9. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [u(t,x)]^2 = 0, \quad t > 0, \quad u(0,x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a. Man berechne die Charakteristiken des Anfangswertproblems und bestimme die Lösung entlang dieser Charakteristiken.
- b. Man untersuche, ob sich zwei Charakteristiken schneiden. Was gilt dann für die Existenz einer klassischen Lösung?

5.10. Man finde die Lösung des Cauchy–Problems

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = [u(t,x)]^2, \quad t > 0, \quad u(0,x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

5.11. Man finde die Lösung des Cauchy–Problems

$$y \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - x \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = 1, \quad x, y > 0, \quad u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

5.12. Man finde die Lösung des Cauchy–Problems

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = u(t,x), \quad t > 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

5.13. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + u(t,x) \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = 0 \quad \text{für } t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Man bestimme eine schwache Lösung. Ist diese Lösung eindeutig bestimmt? Man gebe eine kurze Begründung an.

5.14. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) = 0 \quad \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R},$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Man bestimme eine schwache Lösung. Ist diese Lösung eindeutig bestimmt? Man gebe eine kurze Begründung an.

5.15. Bestimmen Sie die schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}[u(t, x) - 1]^2 = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

mit

$$u(0, x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 1, \\ 2(2 - x) & \text{für } x \in (1, 2], \\ 0 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

5.16. Bestimmen Sie eine schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}[u(t, x) + 1]^2 = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

mit

$$u(0, x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq 0, \\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

5.17. Bestimmen Sie eine schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}[u(t, x) - 1]^2 = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

mit

$$u(0, x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

5.18. Bestimmen Sie eine schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}[u(t, x) + 1]^2 = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

mit

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

5.19. Bestimmen Sie eine schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$2\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}[u(t, x) - 2]^2 = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

mit

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 5, \\ 1 & \text{für } x > 5. \end{cases}$$

5.20. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad u(0, x) = x.$$

- a. Geben Sie die charakteristischen Differentialgleichungen und die Anfangsbedingungen an!
- b. Man bestimme die Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen.
- c. Wie lautet die klassische Lösung $u(t, x)$?
- d. Ist die klassische Lösung auch schwache Lösung?

5.21. Bestimmen Sie eine schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}[u(t, x)]^4 = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Kapitel 6

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In diesem Kapitel betrachten wir, analog zur Darstellung (3.8) mittels Greenscher Funktion, explizite Darstellungsformeln für Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Als Beispiel betrachten wir das Dirichlet–Randwertproblem der Poisson–Gleichung in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$:

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega. \quad (6.1)$$

6.1 Poisson–Formel

Als Spezialfall betrachten wir zunächst die homogene partielle Differentialgleichung (6.1) mit $f \equiv 0$ im Kreis $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}.$$

Gegeben ist also das Dirichlet–Randwertproblem

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } |x| < R, \quad u(x) = g(x) \quad \text{für } |x| = R. \quad (6.2)$$

Unter Verwendung der Polarkoordinaten

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi \quad \text{für } r \in [0, R), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (6.3)$$

ergibt sich für eine in $x \in B_R(0)$ gegebene Funktion

$$u(x) = u(x_1, x_2) = u(x_1(r, \varphi), x_2(r, \varphi)) = \tilde{u}(r, \varphi).$$

Insbesondere wird also die Funktion $u(x)$ in Abhängigkeit der kartesischen Koordinaten (x_1, x_2) mit der Funktion $\tilde{u}(r, \varphi)$ in den Polarkoordinaten (r, φ) identifiziert. Wegen

$$\tilde{u}(r, \varphi + 2\pi) = u(x_1(r, \varphi + 2\pi), x_2(r, \varphi + 2\pi)) = u(x_1(r, \varphi), x_2(r, \varphi)) = \tilde{u}(r, \varphi)$$

ist die Funktion $\tilde{u}(r, \varphi)$ 2π –periodisch in φ .

Die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems (6.2) soll in Polarkoordinaten bestimmt werden. Hierzu muß zunächst der in den kartesischen Koordinaten gegebene Laplace-Operator durch partielle Ableitungen nach den Polarkoordinaten ausgedrückt werden.

Lemma 6.1 Sei $u(x) = \tilde{u}(r, \varphi)$ eine in Polarkoordinaten gegebene stetig differenzierbare Funktion. Für die partiellen Ableitungen gilt dann

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & -\sin \varphi \\ r \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Beweis: Mit der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial r} u(x_1(r, \varphi), x_2(r, \varphi)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) \frac{\partial}{\partial r} x_1(r, \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) \frac{\partial}{\partial r} x_2(r, \varphi) \\ &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} u(x_1(r, \varphi), x_2(r, \varphi)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) \frac{\partial}{\partial \varphi} x_1(r, \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) \frac{\partial}{\partial \varphi} x_2(r, \varphi) \\ &= -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} u(x). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi] = r > 0$$

ist die Jacobi-Matrix invertierbar und somit folgt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & -\sin \varphi \\ r \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \end{pmatrix}$$

für $r > 0$. ■

Lemma 6.2 Für den Laplace-Operator

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x)$$

gilt in Polarkoordinaten die Darstellung

$$\Delta \tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{u}(r, \varphi) \quad (6.5)$$

für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Beweis: Mit (6.4) ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi). \end{aligned}$$

Für die Anwendung des Laplace-Operators folgt mit

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \right] \\ &= \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) + \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) \\ &= \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \right] \\ &\quad + \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \right] \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{2}{r^2} \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{u}(r, \varphi) \\ &\quad + \sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial r^2} \tilde{u}(r, \varphi) - \frac{2}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}(r, \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{u}(r, \varphi) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{u}(r, \varphi) \end{aligned}$$

die Behauptung. ■

Für das Dirichlet-Randwertproblem (6.2) ergibt sich in Polarkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{u}(r, \varphi) = 0 \quad \text{für } r \in (0, R), \varphi \in [0, 2\pi) \quad (6.6)$$

mit der Randbedingung

$$\tilde{u}(R, \varphi) = \tilde{g}(\varphi) := g(x_1(R, \varphi), x_2(R, \varphi)) \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi). \quad (6.7)$$

Zur Lösung des Randwertproblems (6.6) und (6.7) betrachten wir den Ansatz der Separation der Variablen,

$$\tilde{u}(r, \varphi) = U(r)V(\varphi). \quad (6.8)$$

Einsetzen in die partielle Differentialgleichung (6.6) ergibt

$$V(\varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right] + \frac{1}{r^2} U(r) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V(\varphi) = 0$$

bzw., für $U(r) \neq 0$ und $V(\varphi) \neq 0$,

$$\frac{r}{U(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right] + \frac{1}{V(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V(\varphi) = 0.$$

Da die Summanden jeweils nur von r bzw. von φ abhängen, folgt die Gleichheit

$$\frac{r}{U(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right] = -\frac{1}{V(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V(\varphi) = \alpha \quad (6.9)$$

mit geeignet gewählten Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu lösen sind also die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$V''(\varphi) + \alpha V(\varphi) = 0 \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi) \quad (6.10)$$

und

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right] = \alpha U(r) \quad \text{für } r \in (0, R). \quad (6.11)$$

Für die Lösung der Differentialgleichung (6.11) führt der Ansatz

$$U(r) = r^\gamma, \quad U'(r) = \gamma r^{\gamma-1}, \quad U''(r) = \gamma(\gamma-1)r^{\gamma-2}$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$ auf

$$\gamma(\gamma-1)r^\gamma + \gamma r^\gamma = \alpha r^\gamma \quad \text{für } r \in (0, R).$$

Damit ergibt sich

$$\alpha = \gamma^2 \geq 0. \quad (6.12)$$

Insbesondere für $\alpha = 0$ ist die Differentialgleichung (6.11) äquivalent zu

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right] = 0 \quad \text{für } r > 0.$$

Integration ergibt zunächst

$$r \frac{\partial}{\partial r} U(r) = a_0$$

mit einer beliebigen Konstanten $a_0 \in \mathbb{R}$ und in der Folge

$$\frac{\partial}{\partial r} U(r) = \frac{a_0}{r}.$$

Nochmalige Integration ergibt

$$U_0(r) = a_0 \ln r + b_0 \quad \text{für } r > 0 \quad (6.13)$$

mit einer zweiten Integrationskonstanten $b_0 \in \mathbb{R}$.

Für $\alpha = 0$ ergibt sich aus (6.10) die Differentialgleichung

$$V''(\varphi) = 0 \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$V_0(\varphi) = c_0 + c_1 \varphi, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}. \quad (6.14)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von (6.9) für $\alpha = 0$

$$\tilde{u}_0(r, \varphi) = U_0(r)V_0(\varphi) = [a_0 \ln r + b_0][c_0 + c_1 \varphi]. \quad (6.15)$$

Diese Funktion ist eine Lösung der Differentialgleichung (6.6) in $B_R(0)$. Für $r \rightarrow 0$ ist somit die Beschränktheit von $\tilde{u}_0(r, \varphi)$ zu fordern, welche nur durch die Wahl $a_0 = 0$ gewährleistet werden kann. Weiterhin ist die Funktion $\tilde{u}(r, \varphi)$ als 2π -periodisch in φ zu fordern, damit ist auch $c_1 = 0$ zu setzen. Mit $A_0 = b_0 c_0$ ergibt sich als allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung für $\alpha = 0$

$$\tilde{u}_0(r, \varphi) = A_0. \quad (6.16)$$

Für $\alpha > 0$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (6.10),

$$V''(\varphi) + \alpha V(\varphi) = 0,$$

gegeben durch

$$V(\varphi) = A \cos \sqrt{\alpha} \varphi + B \sin \sqrt{\alpha} \varphi.$$

Aus der Forderung der 2π -Periodizität der Funktion $\tilde{u}(r, \varphi) = U(r)V(\varphi)$ folgt

$$\sqrt{\alpha} = n, \quad \alpha = n^2$$

und somit

$$V_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (6.17)$$

Aus

$$\gamma^2 = \alpha = n^2$$

folgt $\gamma = \pm n$ und somit für die Lösung von (6.11)

$$U_n(r) = c_n r^n + c_{-n} r^{-n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (6.18)$$

Wegen der Beschränktheit der Lösung $\tilde{u}(r, \varphi)$ für $r \rightarrow 0$ folgt $c_{-n} = 0$ und somit lauten die Grundlösungen der partiellen Differentialgleichung für $\alpha > 0$

$$\tilde{u}_n(r, \varphi) = U_n(r)V_n(\varphi) = r^n[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \quad (6.19)$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $c_n = 1$ gesetzt haben. Insgesamt ergibt sich für die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung (6.6) in Polarkoordinaten

$$\tilde{u}(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi], \quad r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (6.20)$$

Die verbleibenden Konstanten A_0 und A_n, B_n für $n \in \mathbb{N}$ sind aus der Randbedingung

$$\tilde{u}(R, \varphi) = \tilde{g}(\varphi) \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi)$$

zu bestimmen. Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten der gegebenen Funktion $\tilde{g}(\varphi)$ verwenden wir die folgenden Orthogonalitätsbeziehungen.

Lemma 6.3 Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 2\pi & \text{für } m = n = 0, \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 0 & \text{für } m = n = 0, \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0 \end{cases}$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos n\varphi d\varphi = 0.$$

Beweis: Aus den Additionstheoremen

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

folgen für

$$\alpha = (m + n)\varphi, \quad \beta = (m - n)\varphi$$

die Gleichheiten

$$\begin{aligned} 2 \cos m\varphi \cos n\varphi &= \cos(m + n)\varphi + \cos(m - n)\varphi, \\ -2 \sin m\varphi \sin n\varphi &= \cos(m + n)\varphi - \cos(m - n)\varphi, \\ 2 \sin m\varphi \cos n\varphi &= \sin(m + n)\varphi + \sin(m - n)\varphi. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(m - n)\varphi + \cos(m + n)\varphi] d\varphi, \\ \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(m - n)\varphi - \cos(m + n)\varphi] d\varphi, \\ \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos n\varphi d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(m - n)\varphi + \sin(m + n)\varphi] d\varphi. \end{aligned}$$

Damit folgen die Behauptungen aus

$$\int_0^{2\pi} \sin \mu\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \mu\varphi d\varphi = 0 \quad \text{für } \mu \in \mathbb{N}$$

und $\cos \mu\varphi = 1$ für $\mu = 0$. ■

Einsetzen der Lösung (6.20) in die Randbedingung (6.7) ergibt

$$\tilde{u}(R, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] = \tilde{g}(\varphi) \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Multiplikation dieser Gleichung mit den trigonometrischen Funktionen $\cos m\varphi$ und $\sin m\varphi$ sowie Integration ergibt unter Ausnutzung von Lemma 6.3 für die zu bestimmenden Koeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\varphi) d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{R^n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{R^n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Damit ergibt sich für die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems (6.6) und (6.7) die Darstellung

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) \cos n\psi d\psi\right) \cos n\varphi \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) \sin n\psi d\psi\right) \sin n\varphi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi \right] \right] d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\psi - \varphi) \right] d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) \left[1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) \right] d\psi
\end{aligned}$$

mit der komplexen Zahl

$$z = \varrho \left[\cos(\psi - \varphi) + i \sin(\psi - \varphi) \right], \quad \varrho := |z| = \frac{r}{R} < 1.$$

Wegen $|z| < 1$ ist mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1 = \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left(\frac{z}{1-z} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{z(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{[\varrho \cos(\psi - \varphi) + i\varrho \sin(\psi - \varphi)][1 - \varrho \cos(\psi - \varphi) + i\varrho \sin(\psi - \varphi)]}{[1 - \varrho \cos(\psi - \varphi) - i\varrho \sin(\psi - \varphi)][1 - \varrho \cos(\psi - \varphi) + i\varrho \sin(\psi - \varphi)]} \right) \\
&= \frac{\varrho \cos(\psi - \varphi)[1 - \varrho \cos(\psi - \varphi)] - [\varrho \sin(\psi - \varphi)]^2}{[1 - \varrho \cos(\psi - \varphi)]^2 + [\varrho \sin(\psi - \varphi)]^2} \\
&= \frac{\varrho \cos(\psi - \varphi) - \varrho^2}{1 - 2\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) &= 1 + 2 \frac{\varrho \cos(\psi - \varphi) - \varrho^2}{1 - 2\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2} \\ &= \frac{2\varrho \cos(\psi - \varphi) - 2\varrho^2 + 1 - 2\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2}{1 - 2\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2} \\ &= \frac{1 - \varrho^2}{1 - 2\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2} \end{aligned}$$

und mit $\varrho = \frac{r}{R}$ ist

$$1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2}.$$

Damit ergibt sich für die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems (6.1) die Darstellungsformel von Poisson:

Satz 6.1 *Die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems*

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^2, \quad u(x) = g(x) \quad \text{für } |x| = R$$

ist in Polarkoordinaten (r, φ) gegeben durch die Darstellungsformel von Poisson,

$$u(x) = \tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi \quad \text{für } x \in B_R(0). \quad (6.21)$$

6.2 Darstellungsformeln

Die in (6.21) angegebene Darstellungsformel beschreibt die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems im Kreis $B_R(0)$. Jetzt sollen analoge Darstellungsformeln für Lösungen von Randwertproblemen in beliebigen zwei- und dreidimensionalen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gewonnen werden. Betrachtet wird wieder das Dirichlet–Randwertproblem (3.1) der Poisson–Gleichung,

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Die Multiplikation der partiellen Differentialgleichung mit einer geeignet gewählten Testfunktion v und anschließender Integration über Ω ergibt zunächst

$$\int_{\Omega} f(x)v(x)dx = \int_{\Omega} [-\Delta u(x)]v(x)dx = \int_{\Omega} \left[-\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) \right] v(x) dx.$$

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist der Stokessche Integralsatz,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x) dx = \int_{\Gamma} w(x)n_i(x)ds_x \quad \text{für } i = 1, \dots, d. \quad (6.22)$$

Dabei ist $n(x)$ der äußere Normalenvektor für $x \in \Gamma$. Insbesondere für $w(x) = u(x)v(x)$ folgt durch Anwendung der Produktregel die Formel der partiellen Integration,

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) dx = \int_{\Gamma} u(x) v(x) n_i(x) ds_x - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) dx. \quad (6.23)$$

Wird in (6.23) die Funktion $u(x)$ durch ihre partielle Ableitung nach x_i ersetzt, so folgt

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) v(x) n_i(x) ds_x - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) dx$$

für $i = 1, \dots, d$. Summation über $i = 1, \dots, d$ ergibt die erste Greensche Formel

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} u(x) v(x) ds_x + \int_{\Omega} [-\Delta u(x)] v(x) dx. \quad (6.24)$$

Dabei ist

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_d} u(x) \end{pmatrix}$$

der Gradient der Funktion $u(x)$, und

$$\frac{\partial}{\partial n_x} u(x) = n(x) \cdot \nabla u(x) = \sum_{i=1}^d n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$$

beschreibt die Normalenableitung für $x \in \Gamma$. Durch Vertauschen von u und v gilt analog zu (6.24)

$$\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} v(x) u(x) ds_x + \int_{\Omega} [-\Delta v(x)] u(x) dx. \quad (6.25)$$

Aufgrund der Symmetrie

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx$$

folgt durch Gleichsetzen von (6.24) und (6.25) die zweite Greensche Formel

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} v(x) u(x) ds_x + \int_{\Omega} [-\Delta v(x)] u(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} u(x) v(x) ds_x + \int_{\Omega} [-\Delta u(x)] v(x) dx. \quad (6.26)$$

Insbesondere für die Lösung u des Dirichlet-Randwertproblems (6.1) gilt

$$\int_{\Omega} [-\Delta v(y)] u(y) dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) v(y) ds_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} v(y) g(y) ds_y + \int_{\Omega} f(y) v(y) dy.$$

Zu bestimmen bleibt eine Funktion $v(y) = U^*(x, y)$, so daß

$$\int_{\Omega} [-\Delta_y U^*(x, y)] u(y) dy = u(x) \quad \text{für } x \in \Omega \quad (6.27)$$

gilt. Eine Lösung $U^*(x, y)$, welche die Relation (6.27) erfüllt, heißt Fundamentallösung des Differentialoperators. Mit einer solchen Fundamentallösung folgt für $x \in \Omega$ die Darstellungsformel der Lösung

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) U^*(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) g(y) ds_y + \int_{\Omega} f(y) U^*(x, y) dy. \quad (6.28)$$

Die Lösung $u(x)$ des Dirichlet–Randwertproblems (6.1) kann für einen beliebigen Punkt $x \in \Omega$ berechnet werden, wenn die Normalenableitung

$$t(y) := \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) \quad \text{für } y \in \Gamma$$

bekannt ist. Diese ergibt sich als Lösung einer zugehörigen Randintegralgleichung.

Im folgenden soll der zweidimensionale Fall näher betrachtet werden. Für $d = 2$ ist die Fundamentallösung des Laplace–Operators gegeben durch

$$U^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log |x - y|. \quad (6.29)$$

Dabei ist

$$|x - y| = \sqrt{[y_1 - x_1]^2 + [y_2 - x_2]^2}.$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial y_i} |x - y| = \frac{\partial}{\partial y_i} \sqrt{[y_1 - x_1]^2 + [y_2 - x_2]^2} = \frac{y_i - x_i}{\sqrt{[y_1 - x_1]^2 + [y_2 - x_2]^2}} = \frac{y_i - x_i}{|x - y|}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \log |x - y| = \frac{1}{|x - y|} \frac{\partial}{\partial y_i} |x - y| = \frac{y_i - x_i}{|x - y|^2}$$

folgt für $y \neq x$

$$\begin{aligned} \Delta_y \log |x - y| &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \log |x - y| + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \log |x - y| \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{y_1 - x_1}{|x - y|^2} + \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{y_2 - x_2}{|x - y|^2} \\ &= \frac{1}{|x - y|^2} - 2 \frac{(y_1 - x_1)^2}{|x - y|^4} + \frac{1}{|x - y|^2} - 2 \frac{(y_2 - x_2)^2}{|x - y|^4} = 0, \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$-\Delta_y U^*(x, y) = 0 \quad \text{für } y \neq x. \quad (6.30)$$

Da die Fundamentallösung (6.29) für $x = y$ eine Singularität aufweist, kann die zweite Greensche Formel (6.26) nicht für $v(y) = U^*(x, y)$ angewendet werden. Deshalb betrachtet man für $x \in \Omega$ die Kugel

$$B_\varepsilon(x) = \left\{ z \in \Omega : |z - x| < \varepsilon \right\} \subset \Omega,$$

und das Gebiet

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$-\Delta_y U^*(x, y) = 0 \quad \text{für } y \in \Omega_\varepsilon.$$

Die Anwendung der zweiten Greenschen Formel (6.26) für das gestörte Gebiet Ω_ε ergibt für die Lösung u des Dirichlet Randwertproblems (6.1)

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) U^*(x, y) ds_y - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) u(y) ds_y + \int_{\Omega_\varepsilon} f(y) U^*(x, y) dy.$$

Für den Rand des gestörten Gebietes $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$ gilt

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(x) = \Gamma \cup \partial B_\varepsilon(x)$$

und somit folgt unter Berücksichtigung der Normalenrichtung an $B_\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) U^*(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) g(y) ds_y + \int_{\Omega_\varepsilon} f(y) U^*(x, y) dy \\ &\quad + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) U^*(x, y) ds_y - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) u(y) ds_y. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) U^*(x, y) ds_y \right| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x|=\varepsilon} n(y) \cdot \nabla u(y) \log |x-y| ds_y \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[|\log \varepsilon| \int_{|y-x|=\varepsilon} |\nabla u(y)| ds_y \right] \\ &\leq \sup_{z \in \Omega} |\nabla u(y)| \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[|\log \varepsilon| \int_{|y-x|=\varepsilon} ds_y \right] \\ &= \sup_{z \in \Omega} |\nabla u(y)| \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [|\log \varepsilon| 2\pi\varepsilon] = 0, \end{aligned}$$

wenn u als in Ω stetig differenzierbar vorausgesetzt wird.

Für $y \in \partial B_\varepsilon(x)$ ist der äußere Normalenvektor bezüglich Ω_ε gegeben durch

$$n(y) = \frac{x - y}{|x - y|} \quad \text{für } y \in \partial B_\varepsilon(x).$$

Dann folgt für $y \in \partial B_\varepsilon(x)$

$$\frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) = n(y) \cdot \nabla_y U^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x - y}{|x - y|} \cdot \frac{y - x}{|x - y|^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

und somit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) u(y) ds_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{|y-x|=\varepsilon} u(y) ds_y = u(x),$$

wobei wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung ausgenutzt haben. Damit ergibt sich für $x \in \Omega$ durch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ die Darstellungsformel (6.28), wobei das Gebietsintegral als schwach singuläres Integral erklärt ist.

Für die Bestimmung der noch unbekanntenen Normalenableitung $t(y) = n(y) \cdot \nabla u(y)$ für $y \in \Gamma$ ist neben der Darstellungsformel (6.28) für $x \in \Omega$ auch eine entsprechende Formel für $x \in \Gamma$ herzuleiten. Die Herleitung erfolgt wie oben, jedoch ist zu beachten, daß für den Rand des gestörten Gebietes $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$ für $x \in \Gamma$ die folgende Darstellung gilt:

$$\partial\Omega_\varepsilon = \{y \in \Gamma : |y - x| > \varepsilon\} \cup \{y \in \Omega : |y - x| = \varepsilon\}.$$

Dann folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) u(y) ds_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{y \in \Omega: |y-x|=\varepsilon} u(y) ds_y = \frac{1}{2} u(x),$$

wenn $x \in \Gamma$ auf einem glatten Randstück liegt. Dann ergibt sich unter Berücksichtigung der Randbedingung $u(x) = g(x)$ für $x \in \Gamma$ die Randintegralgleichung

$$\frac{1}{2} g(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) U^*(x, y) ds_y - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) g(y) ds_y + \int_\Omega f(y) U^*(x, y) dy. \quad (6.31)$$

Dabei sind die Randintegrale über Γ als schwach singuläre Kurvenintegrale erklärt, zum Beispiel ist

$$\int_\Gamma U^*(x, y) t(y) ds_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Gamma: |y-x|>\varepsilon} U^*(x, y) t(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Die Darstellungsformel (6.31) kann jetzt verwendet werden, um die bisher unbekanntene Normalenableitung $t(y) = n(y) \cdot \nabla u(y)$ als Lösung einer Randintegralgleichung für $x \in \Gamma$ zu bestimmen:

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) U^*(x, y) ds_y = \frac{1}{2} g(x) + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) g(y) ds_y - \int_\Omega f(y) U^*(x, y) dy. \quad (6.32)$$

Die Darstellungsformel (6.28) beschreibt die eindeutig bestimmte Lösung des Dirichlet–Randwertproblems (6.1). Offenbar beschreibt das Volumenpotential

$$u_f(x) = \int_{\Omega} U^*(x, y) f(y) dy \quad \text{für } x \in \Omega$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichung in (6.1), d.h. es gilt

$$-\Delta u_f(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Die verbleibenden Oberflächenpotentiale beschreiben daher Lösungen der homogenen partiellen Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Das Einfachschichtpotential

$$u(x) = \int_{\Gamma} U^*(x, y) w(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \quad (6.33)$$

beschreibt für jede Dichtefunktion w eine harmonische Funktion, d.h. eine Lösung der Laplace–Gleichung. Dies folgt für $x \in \Omega$ durch die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration sowie durch Anwendung von (6.30). Entsprechend definiert das Doppelschichtpotential

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) v(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \quad (6.34)$$

für jede Dichtefunktion v eine harmonische Funktion.

Als Beispiel betrachten wir das Dirichlet–Randwertproblem der Laplace–Gleichung,

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, \quad u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (6.35)$$

Als Lösungsansatz verwenden wir das Doppelschichtpotential (6.34), welches für jede Dichtefunktion v eine Lösung der Laplace–Gleichung definiert. Zu erfüllen bleibt die Dirichlet–Randbedingung $u(x) = g(x)$ für $x \in \Gamma$. Hierzu betrachten wir in (6.34) den Grenzübergang $x \rightarrow \Gamma$. Wie beim Übergang von der Darstellungsformel (6.28) für $x \in \Omega$ zur Darstellungsformel (6.31) für $x \in \Gamma$ erhalten wir die Randintegralgleichung

$$\frac{1}{2}v(x) - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) v(y) ds_y = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (6.36)$$

Als Lösung der Randintegralgleichung (6.36) erhalten wir die Dichtefunktion v und somit die Darstellung (6.34) für die Lösung des Randwertproblems (6.35).

Abschließend betrachten wir die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems (6.35) für den Fall $\Omega = B_R(0)$. Hierzu verwenden wir wie in (6.3) Polarkoordinaten

$$x = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } r \in (0, R), \varphi \in [0, 2\pi), \quad y = R \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \quad \text{für } \psi \in [0, 2\pi).$$

Für das Doppelschichtpotential (6.34) erhalten wir dann die Darstellung

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y) \cdot (y - x)}{|x - y|^2} v(y) ds_y \quad \text{für } r \in (0, R), \varphi \in [0, 2\pi). \quad (6.37)$$

Mit dem Normalenvektor

$$n(y) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in \Gamma$$

folgt

$$\begin{aligned} n(y) \cdot (y - x) &= \cos \psi [R \cos \psi - r \cos \varphi] + \sin \psi [R \sin \psi - r \sin \varphi] \\ &= R [\cos^2 \psi + \sin^2 \psi] - r [\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi] \\ &= R - r \cos(\psi - \varphi). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= [R \cos \psi - r \cos \varphi]^2 + [R \sin \psi - r \sin \varphi]^2 \\ &= R^2 \cos^2 \psi - 2Rr \cos \psi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \\ &\quad + R^2 \sin^2 \psi - 2Rr \sin \psi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \\ &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Doppelschichtpotential (6.37) die Darstellung in Polarkoordinaten

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R - r \cos(\psi - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} \tilde{v}(\psi) R d\psi \quad \text{für } r \in (0, R), \varphi \in [0, 2\pi). \quad (6.38)$$

Zur Bestimmung der unbekanntenen Dichtefunktion

$$\tilde{v}(\psi) = v(R \cos \psi, R \sin \psi) \quad \text{für } \psi \in [0, 2\pi)$$

betrachten wir die Randintegralgleichung (6.36) in Polarkoordinaten, dabei setzen wir in (6.38) $r = R$,

$$\frac{1}{2} \tilde{v}(\varphi) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{v}(\psi) d\psi = \tilde{g}(\varphi) \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi). \quad (6.39)$$

Integration über $\varphi \in [0, 2\pi]$ ergibt

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{v}(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{v}(\psi) d\psi = \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\varphi) d\varphi$$

und somit

$$\int_0^{2\pi} \tilde{v}(\psi) d\psi = \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) d\psi.$$

Damit folgt aus (6.39)

$$\tilde{v}(\varphi) = 2\tilde{g}(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) d\psi$$

und für das Doppelschichtpotential gilt die Darstellung für $x \in B_R(0)$

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - Rr \cos(\psi - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} \tilde{g}(\psi) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) d\psi \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) ds_y.$$

Aus der Darstellungsformel (6.28) für $u \equiv 1$ folgt für $x \in \Omega$

$$1 = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} U^*(x, y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - Rr \cos(\psi - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} \tilde{g}(\psi) d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\psi) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} - 1 \right] \tilde{g}(\psi) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} \tilde{g}(\psi) d\psi \end{aligned} \quad (6.40)$$

für $r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi)$. Diese Darstellung stimmt mit der Darstellungsformel (6.21) von Poisson überein.

6.3 Abschließende Bemerkungen

Die allgemeine Form einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist für eine skalare Funktion $u(\xi)$ einer Veränderlichen $\xi \in \mathbb{R}^r$ gegeben durch

$$L[u](\xi) = - \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[a_{ji}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} u(\xi) \right] + \sum_{j=1}^r b_j(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} u(\xi) + c(\xi) u(\xi) = f(\xi). \quad (6.41)$$

Kompakt kann der in (6.41) verwendete partielle Differentialoperator L geschrieben werden als

$$L[u](\xi) = -\operatorname{div}[A(\xi)\nabla u(\xi)] + [\underline{b}(\xi)]^\top \nabla u(\xi) + c(\xi)u(\xi). \quad (6.42)$$

Dabei ist $\underline{b}(\xi) \in \mathbb{R}^r$ ein Vektor und $A(\xi) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ eine symmetrische Matrix mit reellen Eigenwerten $\lambda_k(\xi), k = 1, \dots, r$.

Definition 6.1 Der in (6.42) erklärte Differentialoperator L heißt in ξ

i. elliptisch, falls gilt

$$\lambda_k(\xi) > 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, r;$$

ii. parabolisch, falls gilt

$$\lambda_1(\xi) = 0, \quad \lambda_k(\xi) > 0 \quad \text{für } k = 2, \dots, r, \quad \text{rang}[A(\xi), \underline{b}(\xi)] = r;$$

iii. hyperbolisch, falls gilt

$$\lambda_1(\xi) < 0, \quad \lambda_k(\xi) > 0 \quad \text{für } k = 2, \dots, r.$$

Der Differentialoperator L heißt in $D \subset \mathbb{R}^r$ gleichmäßig elliptisch, falls für alle $k = 1, \dots, r$ gilt

$$\lambda_k(\xi) \geq \lambda_0 > 0 \quad \text{für alle } \xi \in D.$$

Meist betrachten wir partielle Differentialgleichungen in der Ortsvariablen $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ und in der Zeit $t \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $\xi = (t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}$, d.h. $r = d + 1$. Für stationäre partielle Differentialgleichungen ist entsprechend $\xi = x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, d.h. $r = d$. Für den Laplace-Operator

$$-\Delta u(x) = -\text{div} \nabla u(x)$$

folgt

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_k(x) = 1$ für $k = 1, \dots, d$. Der Laplace-Operator ist also gleichmäßig elliptisch. Als Beispiel für eine parabolische partielle Differentialgleichung betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = f(t, x). \quad (6.43)$$

Für $\xi = (t, x)$ ist

$$A(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}, \quad \underline{b}(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

und somit folgt

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \dots = \lambda_{d+1} = 1, \quad \text{rang}[A(t, x), \underline{b}(t, x)] = d + 1.$$

Als Beispiel für eine hyperbolische partielle Differentialgleichung betrachten wir abschließend die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = f(t, x) \quad (6.44)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c und

$$A(t, x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}.$$

Für die Eigenwerte von $A(t, x)$ ergibt sich

$$\lambda_1 = -\frac{1}{c^2} < 0, \quad \lambda_2 = \dots = \lambda_{d+1} = 1.$$

Für eine harmonische Anregung

$$f(t, x) = f_0(x)e^{i\omega t}$$

mit einer Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ führt der Ansatz

$$u(t, x) = u_0(x)e^{i\omega t}$$

für (6.44) auf die Helmholtz-Gleichung

$$-\kappa^2 u_0(x) - \Delta u_0(x) = f_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \quad (6.45)$$

mit der Wellenzahl

$$\kappa = \frac{\omega}{c}.$$

In diesem Kapitel haben wir uns am Beispiel der Poisson-Gleichung (6.1) mit der analytischen Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen beschäftigt. Insbesondere die in Abschnitt 6.2 behandelten Darstellungsformeln lassen sich auch auf parabolische und hyperbolische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung übertragen. Zu bestimmen sind dann die jeweiligen Fundamentallösungen.

In der praktischen Anwendung können Anfangs-Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung meist nur näherungsweise durch geeignete Diskretisierungsverfahren gelöst werden. In Kapitel 3 haben wir für den örtlich eindimensionalen Fall Finite Differenzen und Finite Element Methoden behandelt, welche analog auf den im Ort mehrdimensionalen Fall übertragen werden können. Die Behandlung allgemeiner Finite Element Methoden (FEM) sprengt jedoch den Rahmen dieser Vorlesung, deshalb sei hier zum Beispiel auf [6] verwiesen.

6.4 Aufgaben

6.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$ mit $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Gegeben sei die folgende schwache Formulierung: Finde $u_0 \in H_0^1(\Omega, \Gamma_D) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$:

$$\int_{\Omega} (A \nabla u_0) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} (A u_g) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_N} g_N v \, ds_x$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega, \Gamma_D)$. Man leite die zugehörige klassische Formulierung der partiellen Differentialgleichung her.

6.2. Sei $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \infty, 0 < x_2 < x_1\}$.

- Man beschreibe Ω in Polarkoordinaten.
- Man bestimme die allgemeine Lösung des Dirichlet–Randwertproblems

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ für } x_2 = 0 \text{ und } x_2 = x_1.$$

6.3. Sei $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1, 0 < x_2\}$.

- Man beschreibe Ω in Polarkoordinaten.
- Man bestimme die allgemeine Lösung des Dirichlet–Randwertproblems

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0.$$

6.4. Wann existiert eine Lösung des Randwertproblems

$$-\operatorname{div}[\alpha(x) \nabla u(x)] = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad \alpha(x) \frac{\partial}{\partial n_x} u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Ist diese Lösung eindeutig? Man begründe.

6.5. Für alle $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei $A(x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Wann existiert eine Lösung des Randwertproblems

$$-\operatorname{div}[A(x) \nabla u(x)] = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad n_x \cdot A(x) \nabla u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Ist diese Lösung eindeutig? Man begründe.

6.6. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-x \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) - \frac{\partial}{\partial x} u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (1, 2), \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x)|_{x=1} = u_1, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x)|_{x=2} = \frac{1}{2} u_2.$$

- a. Geben Sie die zugehörige Variationsformulierung an.
- b. Wann existiert eine Lösung des Randwertproblems, ist diese eindeutig? Begründen Sie Ihre Aussagen.

6.7. Man zeige, daß die Funktion

$$v(x, y) = -\log |x - y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y,$$

Lösung der Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v(x, y) = 0 \quad \text{für } x \neq y$$

ist.

6.8. Man zeige, daß die Funktion

$$v(x) = \frac{1}{|x|} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq 0,$$

Lösung der Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

ist.

6.9. Man zeige, daß die Funktion

$$v(x) = \frac{\cos k|x|}{|x|} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq 0, \quad k \in \mathbb{R},$$

Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v(x) + k^2 v(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

ist.

Literaturverzeichnis

- [1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Spektrum, Heidelberg, 1992.
- [2] W. Dahmen, A. Reusken: Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Springer, Heidelberg, 2008.
- [3] J. Douglas Faires, R. L. Burden: Numerische Methoden. Spektrum, Heidelberg, 1994.
- [4] M. Hanke–Bourgeois: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens. B. G. Teubner, Stuttgart, 2002.
- [5] E. Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Teubner, Stuttgart, 1977.
- [6] M. Jung, U. Langer: Methode der Finiten Elemente für Ingenieure. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2001.
- [7] H.–G. Roos, H. Schwetlick: Numerische Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1999.
- [8] R. F. Tichy: Mathematik I M WM VT, Vorlesungsmitschrift, TU Graz.
- [9] R. F. Tichy: Mathematik II M WM VT, Vorlesungsmitschrift, TU Graz.
- [10] W. L. Wendland, O. Steinbach: Analysis. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2005.