Partielle Differentialgleichungen

28. Für das Randwertproblem

$$-\mathrm{div}[A(x)\nabla u(x)] + \underline{b}(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega$$

leite man eine Variationsformulierung her. Anschliessend diskutiere man die Elliptizität der zugehörigen Bilinearform.

29. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit das Neumann–Randwertproblem

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial n_x} u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega$$

eine Lösung besitzt. Ist diese eindeutig? Wie kann ggfs. eine eindeutige Lösung bestimmt werden? Für diese gebe man eine Variationsformulierung an und weise deren eindeutige Lösbarbkeit nach.

30. Sei

$$H^1_\Delta(\Omega) := \Big\{ \varphi \in H^1(\Omega) : \Delta\varphi \in L^2(\Omega) \Big\}$$

mit der Norm

$$\|\varphi\|^2_Y = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)} \, .$$

Man zeige, daß für $\varphi \in Y := H^1_0(\Omega) \cap H^1_\Delta(\Omega)$ durch

$$\|\varphi\|_Y := \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

eine äquivalente Norm definiert ist.

31. Für die Lösung des Dirichlet–Randwertproblems

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega$$

leite man eine Variationsformulierung zur Bestimmung von $u \in X = L^2(\Omega)$ her.
Hinweis: Als Testraum verwende man den in Aufgabe **28.** eingeführten Raum Y.

32. Für die Bilinearform

$$a(u,\varphi) := \int_\Omega u(x) \, [-\Delta\varphi(x) \, dx$$

beweise man die Stabilitätsbedingung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{0 \neq \varphi \in Y} \frac{a(u,\varphi)}{\|\varphi\|_Y} \quad \text{für alle } u \in L^2(\Omega).$$