Fixpunktsatz von Banach

Sei ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ gegeben. Weiters sei die Funktion $\Phi\colon [a, b] \to [a, b]$ (Achtung: Φ ist damit eine Selbstabbildung.) eine Kontraktion auf $[a, b]$. Das heißt, es gibt eine Konstante $q < 1$, sodass

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq q\,|x - y|$$

für alle $x, y \in [a, b]$ gilt. Dann hat die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x)$$

genau eine Lösung $\overline{x} \in [a, b]$ und die Methode der sukzessiven Approximation

$$x_{k+1} := \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergiert gegen den Fixpunkt $\overline{x}$ für jede Startnäherung $x_0 \in [a, b]$. Weiters gelten die *a priori* Fehlerabschätzung

$$|x_k - \overline{x}| \leq \frac{q^k}{1-q}\,|x_1 - x_0|$$

und die *a posteriori* Fehlerabschätzung

$$|x_k - \overline{x}| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_k - x_{k-1}|\,.$$