Technische Numerik

10. Gegeben seien paarweise verschiedene Stützstellen

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$$

mit lokalen Maschenweiten $h_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$. $f_n(x)$ sei die stückweise linear Interpolierende der Funktion $f(x) = x^4$. Man gebe eine Fehlerabschätzung für den maximalen Fehler $f(x) - f_n(x)$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$ an und leite daraus eine Bedingung ab, die eine Gleichverteilung des maximalen Fehlers gewährleistet. Für $n = 3$ gebe man eine entsprechende Verteilung der Stützstellen an.

11. Für eine in einem Intervall $[a, b]$ gegebene stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ beschreibt $f(\frac{a+b}{2})$ eine (stückweise) konstante Approximation $f_0(x)$. Man gebe eine Fehlerabschätzung für den maximalen Fehler

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_0(x)|$$

an.
Hinweis: Man verwende die Taylorsche Formel.

12. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$ für $x \in [0, 1]$. Für die Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ bestimme man die linear Interpolierende $I_h f$ sowie die lineare L_2 Projektion $Q_h f$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=0}^{1} f_k \int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_j(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) \, dx \quad \text{für } j = 0, 1$$

mit den linearen Basisfunktionen $\varphi_0(x) = 1 - x$, $\varphi_1(x) = x$, und berechne die Fehler in der L_2 Norm.