Technische Numerik

16. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ und eine Schrittweite $h = 1/n$ seien die Stützstellen $x_k = kh$, $k = 0, \ldots, n$ gegeben. Mit den stückweise konstanten Basisfunktionen

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $k = 1, \ldots, n$ bezeichnet

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x)$$

eine stückweise konstante Funktion. Man bestimme die Zerlegungskoeffizienten bei Interpolation in den Elementmittelpunkten $\hat{x}_k = \frac{1}{2}(2k-1)h$ für $k = 1, \ldots, n$ und bei der L_2–Projektion. Man berechne den jeweiligen Fehler

$$\int_0^1 [f(x) - f_h(x)]^2 \, dx$$

in Abhängigkeit von h.

17. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ und eine Schrittweite $h = 1/n$ seien die Stützstellen $x_k = kh$, $k = 0, \ldots, n$ gegeben. Für die stückweise linear Interpolierende $I_h^1 f(x)$ berechne man den Fehler

$$\int_0^1 [f(x) - I_h^1 f(x)]^2 \, dx$$

in Abhängigkeit von h. Verleichen Sie diesen mit dem Ergebnis aus Aufgabe **16.** Wie gross muss n jeweils gewählt werden, um einen absoluten Fehler von 10^{-6} zu gewährleisten.

18. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Für $n = 6$ seien die gleichmässig verteilten Stützstellen $x_k = k/6$ für $k = 0, 1, \ldots, 6$ gegeben. Man bestimme die L_2–Projektionen $Q_h^0 f$ bzw. $Q_h^1 f$ in den Raum der stückweise konstanten bzw. stückweise linearen Ansatzfunktionen.

Hinweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{1}{2} n(n+1) \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \end{aligned}$$