

## Technische Numerik

**22.** Man berechne die Orthogonalpolynome  $p_0, p_1, p_2, p_3$  im Intervall  $[-1, 1]$  mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens, wobei man von den Monomen  $\{x^j\}_{j=0}^3$  starte. Weiters gebe man die sogenannten Legendre-Polynome

$$P_j(x) := \frac{p_j(x)}{p_j(1)}$$

für  $j = 0, 1, 2, 3$  an. Man berechne

$$\int_{-1}^1 P_j(x) P_\ell(x) dx$$

für  $j, \ell = 0, 1, 2, 3$ . Zuletzt bestimme man noch die Nullstellen von  $P_1, P_2$  und  $P_3$  und stelle  $P_j$  für  $j = 0, 1, 2, 3$  grafisch dar.

*Hinweis:* Die Integrale müssen nicht händisch berechnet werden.

**23.** Man berechne Näherungswerte für das Integral

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$$

mit der Mittelpunktregel und den Newton-Cotes Integrationsformeln für  $n = 1$  (Trapezregel),  $n = 2$  (Simpson-Regel/Keplersche Fassregel),  $n = 3$  (3/8-Regel) und  $n = 4$  (Milne-Regel). Dazu schlage man für  $n = 3, 4$  die Stützstellen und Integrationsgewichte nach und transformiere diese gegebenenfalls auf das Intervall  $[0, 1]$ . Man berechne die zugehörigen Integrationsfehler und man vergleiche diese mit den Werten aus den zugehörigen Fehlerabschätzungen, wobei man für  $n = 3, 4$  die Fehlerabschätzungen nachschlage.

Weiters berechne man Näherungswerte und die zugehörigen Integrationsfehler mit Hilfe der Gauß-Legendre Integrationsformeln für  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Dazu schlage man die Stützstellen und Integrationsgewichte bezüglich des Intervalls  $[-1, 1]$  nach und transformiere diese auf das Intervall  $[0, 1]$ .

*Hinweis:* Die Integrationsformeln müssen nicht händisch ausgewertet werden.

**24.** Man berechne für  $n \in \{2, 4, 8\}$  Näherungswerte für das Integral

$$\frac{5}{e^\pi - 2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos(x) dx = 1$$

und für das Integral

$$\int_0^1 \cos(\pi \sin(\pi x)) dx \approx -0.3042421776440938$$

mit der summierten Trapezregel und berechne die zugehörigen Integrationsfehler.

*Zusatzfrage:* Welche Eigenschaft des Integranden  $\cos(\pi \sin(\pi x))$  könnte für das Fehlerverhalten verantwortlich sein?

*Hinweis:* Die Integrationsformeln müssen nicht händisch ausgewertet werden.