Söllerhaus, 15.-18. Oktober 2003

Modellierung der Temperaturverteilung bei der Luftkühlung elektrischer Schaltanlagen – Simulation der Stromdichte

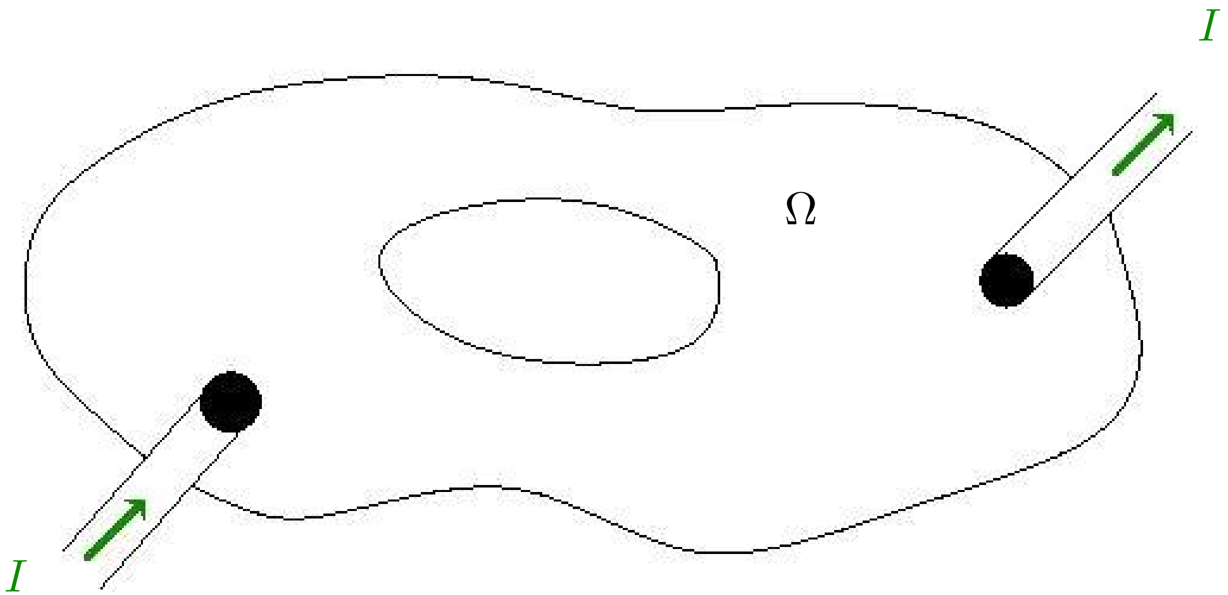
Universität Stuttgart
Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation
D-70569 Stuttgart

Prof. Dr. W.L. Wendland
Priv.-Doz. O. Steinbach
Dipl.-Math J. Breuer

ABB Corporate Research
D-68526 Ladenburg

Prof. Dr. Z. Andjelic

Praktische Problemstellung



Gegeben: Strom I

Frequenz ω

Gesucht: Stromdichteverteilung $\mathbf{j}$ in Ω

$\rightsquigarrow$ Elastostatik, Elastodynamik

$\rightsquigarrow$ Thermodynamik

Modellierung der Stromdichte

Maxwell'sche Gleichungen

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0,$$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Lineares Materialgesetz und Ohm'sches Gesetz

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

für stückweise homogenes und isotropes Material, d.h. ε, μ und σ sind stückweise konstant.

Modellierung der Stromdichte

Maxwell'sche Gleichungen

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0,$$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Lineares Materialgesetz und Ohm'sches Gesetz

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

für stückweise homogenes und isotropes Material, d.h. ε, μ und σ sind stückweise konstant.

Zeitharmonischer Ansatz und Vernachlässigung der Verschiebungsströme (eddy currents model)

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \qquad \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 0,$$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E}, \quad \operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0.$$

Elimination des Magnetfeldes ergibt mit $\kappa^2 := i\omega\mu\sigma$ das System

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E} + \kappa^2\mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } \Omega^c, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } \Omega^c \text{ (Eichbedingung).} \end{aligned}$$

Mathematische Beschreibung

Für genügend glatte Funktionen gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{V}}\,dx = \int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}}\,dx - \int_\Gamma (\mathbf{curl}\,\mathbf{U}_{|\Gamma} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times (\overline{\mathbf{V}}_{|\Gamma} \times \mathbf{n}))\,dS_x.$$

Damit ist

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega) := \{\mathbf{V} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \mathbf{curl}\,\mathbf{V} \in \mathbf{L}_2(\Omega)\}$$

der richtige Energieraum und die zugehörigen Spuroperatoren können für glatte Funktionen durch

$$\gamma_D \mathbf{U} := \mathbf{n} \times (\mathbf{U}_{|\Gamma} \times \mathbf{n}), \quad \gamma_N \mathbf{U} := \mathbf{curl}\,\mathbf{U}_{|\Gamma} \times \mathbf{n}$$

definiert werden. Weiter sei

$$\gamma_\times \mathbf{U} := \mathbf{U}_{|\Gamma} \times \mathbf{n}, \quad \gamma_n \mathbf{U} := \mathbf{U}_{|\Gamma} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathsf{R}\mathbf{u} := \mathbf{u} \times \mathbf{n}.$$

Mathematische Beschreibung

Für genügend glatte Funktionen gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{V}}\,dx = \int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}}\,dx - \int_\Gamma (\mathbf{curl}\,\mathbf{U}_{|\Gamma}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\times(\overline{\mathbf{V}}_{|\Gamma}\times\mathbf{n}))\,dS_x.$$

Damit ist

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega) := \{\mathbf{V}\in\mathbf{L}_2(\Omega) : \mathbf{curl}\,\mathbf{V}\in\mathbf{L}_2(\Omega)\}$$

der richtige Energieraum und die zugehörigen Spuroperatoren können für glatte Funktionen durch

$$\gamma_D\mathbf{U} := \mathbf{n}\times(\mathbf{U}_{|\Gamma}\times\mathbf{n}),\quad \gamma_N\mathbf{U} := \mathbf{curl}\,\mathbf{U}_{|\Gamma}\times\mathbf{n}$$

definiert werden. Weiter sei

$$\gamma_\times\mathbf{U} := \mathbf{U}_{|\Gamma}\times\mathbf{n},\quad \gamma_n\mathbf{U} := \mathbf{U}_{|\Gamma}\cdot\mathbf{n},\quad \mathsf{R}\mathbf{u} := \mathbf{u}\times\mathbf{n}.$$

Analog gilt im Außenraum

$$\int_{\Omega^c} \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{V}}\,dx = \int_{\Omega^c} \mathbf{curl}\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}}\,dx + \int_\Gamma (\mathbf{curl}\,\mathbf{U}_{|\Gamma}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\times(\overline{\mathbf{V}}_{|\Gamma}\times\mathbf{n}))\,dS_x.$$

Wir verwenden hier den Energieraum

$$\mathbf{W}(\mathbf{curl}\,,\Omega^c) := \left\{\frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1+|\cdot|^2}}\in\mathbf{L}_2(\Omega^c) : \mathbf{curl}\,\mathbf{V}\in\mathbf{L}_2(\Omega^c)\right\}.$$

Die zugehörigen Spuroperatoren werden mit ^{c} bezeichnet.

Spuroperatoren

Wir haben

$$\gamma_D, \gamma_\times : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{pw}(\Gamma).$$

Benötigen *surjektive stetige Fortsetzungen* nach $\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega)$ (Spursätze)

$$\gamma_D : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega) \to ?, \quad \gamma_\times : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega) \to ?.$$

Definiere Bildräume

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{||}(\Gamma) := \gamma_D\left(\mathbf{H}^1(\Omega)\right), \quad \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{\perp}(\Gamma) := \gamma_\times\left(\mathbf{H}^1(\Omega)\right)$$

Für Lipschitz–Polyeder lassen sich die Räume anschaulich beschreiben durch

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{||}(\Gamma) = \{\text{tangentiale Vektorfelder in } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{pw}(\Gamma) \text{ mit schwach stetiger Tangentialkomponente an Kanten}\}$$

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{\perp}(\Gamma) = \{\text{tangentiale Vektorfelder in } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{pw}(\Gamma) \text{ mit schwach stetiger Normalkomponente an Kanten}\}$$

Partielle Integration

$$\int_\Omega (\mathbf{curl}\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} - \mathbf{U}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{V})\,dx = \int_\Gamma \gamma_D\mathbf{U}\cdot\gamma_\times\mathbf{V}\,dS_x$$

liefert die Fortsetzung

$$\gamma_D : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega) \to \left[\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{\perp}(\Gamma)\right]' =: \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}_{\perp}(\Gamma), \quad \gamma_\times : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega) \to \left[\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{||}(\Gamma)\right]' =: \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}_{||}(\Gamma).$$

Spuroperatoren

Zu stückweise glatter Fläche Γ definiere durch Lokalisation die Oberflächenableitungen

$$\nabla_\Gamma u := \mathbf{n} \times (\nabla u_{|\Gamma} \times \mathbf{n}), \quad \mathbf{curl}_\Gamma\, u := \nabla_\Gamma u \times \mathbf{n},$$

deren adjungierte Operatoren

$$\mathrm{div}_\Gamma := -\nabla_\Gamma^*, \quad \mathrm{curl}_\Gamma := \mathbf{curl}_\Gamma{}^*,$$

sowie den Laplace–Beltrami–Operator

$$\Delta_\Gamma := \mathrm{div}_\Gamma \nabla_\Gamma = -\mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{curl}_\Gamma\,.$$

Spuroperatoren

Zu stückweise glatter Fläche Γ definiere durch Lokalisation die Oberflächenableitungen

$$\nabla_\Gamma u := \mathbf{n} \times (\nabla u_{|\Gamma} \times \mathbf{n}), \quad \mathbf{curl}_\Gamma\, u := \nabla_\Gamma u \times \mathbf{n},$$

deren adjungierte Operatoren

$$\mathrm{div}_\Gamma := -\nabla_\Gamma^*, \quad \mathrm{curl}_\Gamma := \mathbf{curl}_\Gamma{}^*,$$

sowie den Laplace–Beltrami–Operator

$$\Delta_\Gamma := \mathrm{div}_\Gamma \nabla_\Gamma = -\mathrm{curl}_\Gamma \,\mathbf{curl}_\Gamma\,.$$

Mit

$$\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) := \left\{ \mathbf{V} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{V} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\},$$

$$\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) := \left\{ \mathbf{V} \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{V} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\} = \left[\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)\right]'$$

sind die Spuroperatoren

$$\gamma_D : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega) \to \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma), \quad \gamma_\times : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega) \to \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma),$$

sowie

$$\gamma_N : \mathbf{H}(\mathbf{curl}^{\,2}, \Omega) \to \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma), \qquad \gamma_n : \mathbf{H}(\mathrm{div}\,, \Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

linear, stetig und surjektiv [A. Buffa].

Randbedingungen

Stetige Tangentialkomponente (Dirichlet–Daten)

$$\left[\gamma_D \mathbf{E}\right]_\Gamma := \gamma_D^c \mathbf{E} - \gamma_D \mathbf{E} = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

Transmissionsrandbedingung (Neumann–Daten)

$$\left[\frac{1}{\mu}\gamma_N \mathbf{E}\right]_\Gamma = \mathcal{J} = \mathcal{J}(I,\omega) \quad \text{auf } \Gamma$$

Abstrahlungsbedingungen

$$\mathbf{E} = \mathcal{O}(|x|^{-1}), \quad \mathbf{curl}\,\mathbf{E} = \mathcal{O}(|x|^{-1}) \quad \text{gleichmäßig für } |x| \to \infty$$

Seien Γ_j die Z Zusammenhangskomponenten von Γ. Dann erfüllt jedes $\mathbf{E}_k := \nabla\phi_k$ mit

$$\begin{aligned} \Delta\phi_k &= 0 \qquad \text{in } \Omega^c, \\ \gamma_1^c \phi_k &= \delta_{kj} \quad \text{in } \Gamma^j. \end{aligned}$$

das homogene Problem. Die Eichbedingungen

$$\int_{\Gamma_k} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\, dS_x = 0, \quad k = 1,\ldots,Z$$

liefern Eindeutigkeit.

Eindeutige Lösbarkeit

Das Variationsproblem: Finde $\mathbf{E} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ mit

$$\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{curl}\,\mathbf{E}, \mathbf{curl}\,\mathbf{V}\right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{\kappa^2}{\mu}\,(\mathbf{E}, \mathbf{V})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = -\langle \mathcal{J}, \gamma_D \mathbf{V}\rangle$$

für alle $\mathbf{V} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ mit

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} := \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega) \cap \left\{ \mathbf{V} \in \mathbf{W}(\mathbf{curl}\,, \Omega^c) : \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \int_{\Gamma_k} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS_x = 0 \right\}$$

zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E} + \kappa^2\mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } \Omega^c \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } \Omega^c \\ \left[\gamma_D \mathbf{E}\right]_\Gamma &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \\ \left[\frac{1}{\mu}\gamma_N \mathbf{E}\right]_\Gamma &= \mathcal{J} \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

besitzt für $Im\,\kappa > 0$ und stetige rechte Seite $-\langle \mathcal{J}, \cdot \rangle$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{E} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$.

Bestimmung von $\mathcal{J}$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}_\Gamma (\gamma_N \mathbf{E}), \phi \rangle &= -\langle \mathbf{curl}\,\mathbf{E} \times \mathbf{n}, \nabla_\Gamma \phi \rangle = \langle \mathbf{curl}\,\mathbf{E}, \nabla_\Gamma \phi \times \mathbf{n} \rangle \\
&= \langle \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{curl}\,\mathbf{E}, \phi \rangle = \langle (\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}, \phi \rangle
\end{aligned}
$$

Jede Lösung von (1) erfüllt in $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\operatorname{div}_\Gamma (\gamma_N \mathbf{E}) = -\kappa^2 \gamma_n \mathbf{E}$$

bzw.

$$\operatorname{div}_\Gamma (\gamma_N^c \mathbf{E}) = 0$$

Bestimmung von $\mathcal{J}$

Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{div}_\Gamma (\gamma_N \mathbf{E}), \phi\rangle &= -\langle \mathbf{curl}\,\mathbf{E} \times \mathbf{n}, \nabla_\Gamma \phi\rangle = \langle \mathbf{curl}\,\mathbf{E}, \nabla_\Gamma \phi \times \mathbf{n}\rangle \\ &= \langle \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{curl}\,\mathbf{E}, \phi\rangle = \langle (\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}, \phi\rangle\end{aligned}$$

Jede Lösung von (1) erfüllt in $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\operatorname{div}_\Gamma (\gamma_N \mathbf{E}) = -\kappa^2 \gamma_n \mathbf{E}$$

bzw.

$$\operatorname{div}_\Gamma (\gamma_N^c \mathbf{E}) = 0$$

Bestimmung von $\mathcal{J}$:

1. Bestimme $\gamma_n \mathbf{E}$ aus gegebenen Daten I und ω

Bestimmung von $\mathcal{J}$

Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}_\Gamma\,(\gamma_N \mathbf{E}), \phi\rangle &= -\langle \mathbf{curl}\,\mathbf{E} \times \mathbf{n}, \nabla_\Gamma \phi\rangle = \langle \mathbf{curl}\,\mathbf{E}, \nabla_\Gamma \phi \times \mathbf{n}\rangle \\ &= \langle \mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{curl}\,\mathbf{E}, \phi\rangle = \langle (\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}, \phi\rangle\end{aligned}$$

Jede Lösung von (1) erfüllt in $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\mathrm{div}_\Gamma\,(\gamma_N \mathbf{E}) = -\kappa^2 \gamma_n \mathbf{E}$$

bzw.

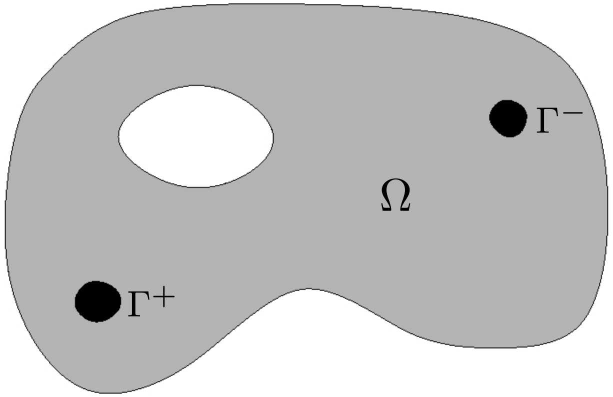
$$\mathrm{div}_\Gamma\,(\gamma_N^c \mathbf{E}) = 0$$

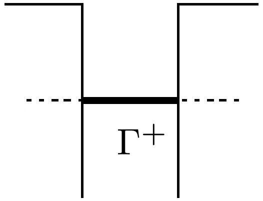
Bestimmung von $\mathcal{J}$:

1. Bestimme $\gamma_n \mathbf{E}$ aus gegebenen Daten I und ω
2. Bestimme $\mathcal{J}$ mit

$$\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{J} = \mathrm{div}_\Gamma \left[\frac{1}{\mu}\gamma_N \mathbf{E}\right]_\Gamma = \frac{\kappa^2}{\mu}\gamma_n \mathbf{E} = i\omega\sigma\gamma_n \mathbf{E} =: -f$$

1.Schritt





Löse Feldgleichungen im unendlichen Zylinder über $\Gamma^{\pm}$ mit der Nebenbedingung

$$\int_{\Gamma^{\pm}} \sigma \mathbf{E}_{\pm} \cdot \mathbf{n}\, dx = I$$

Aus Symmetriegründen ist die Normalkomponente e Lösung der zweidimensionalen skalaren Helmholtz–Gleichung

$$-\Delta e + \kappa^2 e = 0$$

im Querschnitt. Mit Polarkoordinaten

$$-\frac{\partial^2}{\partial R^2} e - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} e - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta} e\right) + \kappa^2 e = 0.$$

folgt aus Rotationssymmetrie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-e'' - \frac{1}{R} e' + \kappa^2 e = 0.$$

Allgemeine Lösung (mit Bessel–Funktionen I_n und K_n)

$$e = c_1 I_0(\kappa R) + c_2 K_0(\kappa R).$$

Wegen

$$|K_0(\kappa R)| \to \infty \text{ für } R \to 0$$

folgt

$$e = c_1 I_0(\sqrt{\kappa} R).$$

Die Nebenbedingung

$$I^{\pm} = \sigma \int_{\Gamma^{\pm}} e \, dx$$

legt die noch freie Konstante c_1 fest. Die normierte Lösung

$$e_0 := \frac{I^{\pm}}{\sigma} \left(\int_{\Gamma^{\pm}} I_0(\kappa R(x)) \, dx \right)^{-1} I_0(\kappa R(x)) \quad x \in \Gamma^{\pm}$$

definiert schließlich

$$f := -i\omega\sigma \begin{cases} \pm e_0 & x \in \Gamma^{\pm}, \\ 0 & x \in \Gamma \setminus \Gamma^{\pm}. \end{cases}$$

2.Schritt

Wir benutzen die Hodge–Zerlegung

$$\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) = \nabla_\Gamma(\mathcal{H}(\Gamma)) \oplus \mathbf{curl}_\Gamma\,(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}),$$

wobei

$$\mathcal{H}(\Gamma) := \left\{\phi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R} : \Delta_\Gamma \phi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}\right\}.$$

Der Ansatz

$$\mathcal{J} = \nabla_\Gamma \phi + \mathbf{curl}_\Gamma\,\rho$$

liefert

$$\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{J} = \Delta_\Gamma \phi = -f$$

Wegen

$$\langle \mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{J}, 1\rangle = -\langle \mathcal{J}, \nabla_\Gamma 1\rangle = 0$$

für jede Zusammenhangskomponente von Γ, folgt die Lösbarkeitsbedingung

$$\langle f, 1\rangle = \int_{\Gamma_k} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS_x = 0,\ \ k = 1,\ldots,Z \quad (\ \widehat{=}\ \ \text{Kontinuitätsgleichung})$$

Löse Variationsproblem

$$\text{Finde } \phi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R}\text{: } \langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \psi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} = \langle -f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \text{ für alle } \psi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R} \tag{2}$$

Die Bilinearform ist stetig und elliptisch

$$\langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \phi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} = \|\nabla_\Gamma \phi\|^2_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \geq c \, \|\phi\|^2_{H^1(\Gamma)} \text{ für alle } \phi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R}.$$

Damit existiert eindeutige Lösung $\phi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R}$ mit $\phi \in \mathcal{H}(\Gamma)$. Im kontinuierlichen Fall definiert das Oberflächenpotential

$$\mathcal{J} := \nabla_\Gamma \phi \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$$

die gesuchte Lösung $\mathcal{J}$.

Löse Variationsproblem

$$\text{Finde } \phi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R}\text{: } \langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \psi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} = \langle -f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \text{ für alle } \psi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R} \tag{2}$$

Die Bilinearform ist stetig und elliptisch

$$\langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \phi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} = \|\nabla_\Gamma \phi\|^2_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \geq c\,\|\phi\|^2_{H^1(\Gamma)} \text{ für alle } \phi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R}.$$

Damit existiert eindeutige Lösung $\phi \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R}$ mit $\phi \in \mathcal{H}(\Gamma)$. Im kontinuierlichen Fall definiert das Oberflächenpotential

$$\mathcal{J} := \nabla_\Gamma \phi \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$$

die gesuchte Lösung $\mathcal{J}$. Diskretisierung $\phi_h \in S^1(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$ ist wegen $\Delta_\Gamma \phi_h \in H^{-1}(\Gamma)$ so nicht möglich. Betrachte deshalb Sattelpunktproblem

Finde $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\phi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{K} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} + \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K}, \phi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= 0 \\ -\langle \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{J}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= \langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{K} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und alle $\psi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$.

Wähle $\psi = \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K}$ als Testfunktion in 2. Gleichung. Addition zur 1. Gleichung ergibt modifiziertes Sattelpunktproblem

Finde $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\phi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$ mit (3)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{K} \rangle_{\mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)} + \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K}, \phi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= -\langle f, \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K} \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ -\langle \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{J}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= \langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{K} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und alle $\psi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$.

Wähle $\psi = \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K}$ als Testfunktion in 2. Gleichung. Addition zur 1. Gleichung ergibt modifiziertes Sattelpunktproblem

Finde $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\phi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$ mit (3)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{K} \rangle_{\mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)} + \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K}, \phi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= -\langle f, \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K} \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ -\langle \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{J}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= \langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{K} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und alle $\psi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$.

In Operatorschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} A & D^* \\ -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{J} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Der Operator A ist invertierbar

$$DA^{-1}D^*\phi = f_2 - DA^{-1}f_1.$$

Wegen

$$\ker(DA^{-1}D^*) = \ker(D^*) = \operatorname{lin}\{1\}.$$

ist das Schur–Komplement invertierbar auf $L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\phi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$.

Wähle $\psi = \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K}$ als Testfunktion in 2. Gleichung. Addition zur 1. Gleichung ergibt modifiziertes Sattelpunktproblem

Finde $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\phi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$ mit (3)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{K} \rangle_{\mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)} + \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K}, \phi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= -\langle f, \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{K} \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ -\langle \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{J}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= \langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{K} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und alle $\psi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$.

In Operatorschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} A & D^* \\ -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{J} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Der Operator A ist invertierbar

$$DA^{-1}D^*\phi = f_2 - DA^{-1}f_1.$$

Wegen

$$\ker(DA^{-1}D^*) = \ker(D^*) = \operatorname{lin}\{1\}.$$

ist das Schur–Komplement invertierbar auf $L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\phi \in L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$.

Lösung von (2) ist Lösung von (3)

$\Rightarrow \phi \in H^1(\Gamma)$.

Addition der Beziehung

$$\langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \psi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} = \langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}$$

zur 2. Gleichung ergibt

Finde $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\phi \in H^1(\Gamma)$ mit (4)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{K} \rangle_{\mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)} + \langle \mathrm{div}_\Gamma \mathcal{K}, \phi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= -\langle f, \mathrm{div}_\Gamma \mathcal{K} \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ -\langle \mathrm{div}_\Gamma \mathcal{J}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \psi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} &= 2\langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{K} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ und alle $\psi \in H^1(\Gamma)$.

Addition der Beziehung

$$\langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \psi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} = \langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}$$

zur 2. Gleichung ergibt

$$\text{Finde } \mathcal{J} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \text{ und } \phi \in H^1(\Gamma) \text{ mit} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{K} \rangle_{\mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)} + \langle \mathrm{div}_\Gamma \mathcal{K}, \phi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= -\langle f, \mathrm{div}_\Gamma \mathcal{K} \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ -\langle \mathrm{div}_\Gamma \mathcal{J}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \psi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} + \langle \phi, 1 \rangle_{L_2(\Gamma)} \langle \psi, 1 \rangle_{L_2(\Gamma)} &= 2 \langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{K} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ und alle $\psi \in H^1(\Gamma)$.

System (4) ist elliptisch.

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\phi \in H^1(\Gamma)$.

Addition der Beziehung

$$\langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \psi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} = \langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}$$

zur 2. Gleichung ergibt

Finde $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma)$ und $\phi \in H^1(\Gamma)$ mit (4)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{K} \rangle_{\mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma\,,\Gamma)} + \langle \mathrm{div}_\Gamma\, \mathcal{K}, \phi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= -\langle f, \mathrm{div}_\Gamma\, \mathcal{K} \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ -\langle \mathrm{div}_\Gamma\, \mathcal{J}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \nabla_\Gamma \phi, \nabla_\Gamma \psi \rangle_{\mathbf{L}_2(\Gamma)} + \langle \phi, 1 \rangle_{L_2(\Gamma)} \langle \psi, 1 \rangle_{L_2(\Gamma)} &= 2\langle f, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{K} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma)$ und alle $\psi \in H^1(\Gamma)$.

System (4) ist elliptisch.

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\mathcal{J} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma)$ und $\phi \in H^1(\Gamma)$.

Konforme Galerkin–Diskretisierung

$$\mathcal{J}_h \in \mathcal{RT}(\Gamma) \subset \mathbf{H}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma), \quad \phi_h \in S^1(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\mathcal{J}_h \in \mathcal{RT}(\Gamma)$ und $\phi_h \in S^1(\Gamma)$

$\Rightarrow$ quasi–optimale Fehlerabschätzung

Potentiale und Darstellungsformel

Klassische Darstellungsformel

$$\mathbf{E}(x) = -\mathbf{curl}_x \int_\Gamma G_\kappa(x,\cdot)(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\,dS_y + \int_\Gamma G_\kappa(x,\cdot)(\mathbf{curl}\,\mathbf{E}\times\mathbf{n})\,dS_y + \mathbf{grad}_x \int_\Gamma G_\kappa(x,\cdot)(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\,dS_y$$

mit der Fundamentallösung des Helmholtz–Operators,

$$G_\kappa(x,y) := \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}.$$

(Skalares) Einfachschichtpotential

$$\Psi_V^\kappa[\sigma](x) := \int_\Gamma G_\kappa(x,y)\sigma(y)\,dS_y, \quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\Gamma$$

(Vektorielles) Einfachschichtpotential

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{A}}^\kappa[\boldsymbol{\Sigma}](x) := \int_\Gamma G_\kappa(x,y)\boldsymbol{\Sigma}(y)\,dS_y, \quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\Gamma$$

Doppelschichtpotential

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{M}}^\kappa[\mathbf{V}](x) := \mathbf{curl}_x\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{A}}^\kappa(\mathsf{R}\mathbf{V})(x), \quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\Gamma$$

Damit schreibt sich die Darstellungsformel als

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\Psi}_M^\kappa[\gamma_D\mathbf{U}] + \boldsymbol{\Psi}_A^\kappa[\gamma_N\mathbf{U}] + \mathbf{grad}\,\Psi_V^\kappa[\gamma_n\mathbf{U}] \quad \text{in } \Omega,$$

bzw.

$$\mathbf{U} = -\boldsymbol{\Psi}_M^\kappa[\gamma_D^c\mathbf{U}] - \boldsymbol{\Psi}_A^\kappa[\gamma_N^c\mathbf{U}] - \mathbf{grad}\,\Psi_V^\kappa[\gamma_n^c\mathbf{U}] \quad \text{in } \Omega^c.$$

Randintegraloperatoren

Skalare Randintegraloperatoren

$$V_\kappa := \gamma_0 \Psi_V^\kappa$$

Vektorielle Randintegraloperatoren

$$\mathbf{A}_\kappa := \gamma_D \mathbf{\Psi}_{\mathbf{A}}^\kappa, \quad \mathbf{B}_\kappa := \frac{1}{2}(\gamma_N + \gamma_N^c)\mathbf{\Psi}_{\mathbf{A}}^\kappa, \quad \mathbf{C}_\kappa := \frac{1}{2}(\gamma_D + \gamma_D^c)\mathbf{\Psi}_{\mathbf{M}}^\kappa, \quad \mathbf{N}_\kappa := \gamma_N \mathbf{\Psi}_{\mathbf{M}}^\kappa.$$

Abbildungseigenschaften

$$V_\kappa : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

$$\mathbf{A}_\kappa : \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$$

$$\mathbf{B}_\kappa : \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$$

$$\mathbf{C}_\kappa : \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$$

$$\mathbf{N}_\kappa : \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$$

Randintegralgleichungen

Darstellungsformel liefert für $x \in \Omega$ die Randintegralgleichungen

$$\gamma_D \mathbf{E} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{C}_\kappa\right)[\gamma_D \mathbf{E}] + \mathbf{A}_\kappa[\gamma_N \mathbf{E}] + (\nabla_\Gamma \circ V_\kappa)[\gamma_n \mathbf{E}]$$

$$\gamma_N \mathbf{E} = \mathbf{N}_\kappa[\gamma_D \mathbf{E}] + \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{B}_\kappa\right)[\gamma_N \mathbf{E}]$$

Im Außenraum ergebeben sich für $x \in \Omega^c$ die Randintegralgleichungen

$$\gamma_D^c \mathbf{E} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{C}_0\right)[\gamma_D^c \mathbf{E}] - \mathbf{A}_0[\gamma_N^c \mathbf{E}] - (\nabla_\Gamma \circ V_0)[\gamma_n^c \mathbf{E}]$$

$$\gamma_N^c \mathbf{E} = -\mathbf{N}_0[\gamma_D^c \mathbf{E}] + \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{B}_0\right)[\gamma_N^c \mathbf{E}]$$

Was machen wir mit $\gamma_n \mathbf{E}$, $\gamma_n^c \mathbf{E}$?

Benutzen die Beziehung

$$\mathrm{div}_\Gamma\,(\mu^{-1}\gamma_N\mathbf{E}) = -\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{J} = f, \quad \mathrm{div}_\Gamma\,(\gamma_N^c\mathbf{E}) = 0$$

und erhalten mit der Hodge–Zerlegung $\gamma_N\mathbf{E}$

$$\gamma_N\mathbf{E} =: \mu(-\mathcal{J} + \boldsymbol{\lambda}), \quad \gamma_N^c\mathbf{E} =: \mu_0\boldsymbol{\lambda}^c = \mu_0\boldsymbol{\lambda}$$

mit der Eigenschaft

$$\mathrm{div}_\Gamma\,\boldsymbol{\lambda} = 0.$$

Benutzen die Beziehung

$$\mathrm{div}_\Gamma\,(\mu^{-1}\gamma_N\mathbf{E}) = -\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{J} = f, \quad \mathrm{div}_\Gamma\,(\gamma_N^c\mathbf{E}) = 0$$

und erhalten mit der Hodge–Zerlegung $\gamma_N\mathbf{E}$

$$\gamma_N\mathbf{E} =: \mu(-\mathcal{J} + \boldsymbol{\lambda}), \quad \gamma_N^c\mathbf{E} =: \mu_0\boldsymbol{\lambda}^c = \mu_0\boldsymbol{\lambda}$$

mit der Eigenschaft

$$\mathrm{div}_\Gamma\,\boldsymbol{\lambda} = 0.$$

Die Unbekannte $\boldsymbol{\lambda}$ kann deshalb aus

$$\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{0},\Gamma) := \left\{\mathbf{V} \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\,,\Gamma) : \mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{V} = 0\right\}$$

gewählt werden. Testet man die erste Integralgleichung mit $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{0},\Gamma)$ folgt

$$\langle(\nabla_\Gamma \circ V_\kappa)[\gamma_n\mathbf{E}],\boldsymbol{\theta}\rangle = -\langle V_\kappa[\gamma_n\mathbf{E}],\mathrm{div}_\Gamma\,\boldsymbol{\theta}\rangle = 0.$$

Die Terme mit $\gamma_n\mathbf{E}$, bzw. $\gamma_n\mathbf{E}^c$ fallen deshalb weg. Wir setzen noch

$$\gamma_D\mathbf{E} = \gamma_D^c\mathbf{E} =: \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}_\Gamma\,,\Gamma)$$

Variationsformulierung

Finde $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{0}, \Gamma)$ mit

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\theta}, (\mu_0 A_0 + \mu A_\kappa)\boldsymbol{\lambda}\rangle + \langle \boldsymbol{\theta}, (C_0 + C_\kappa)\mathbf{u}\rangle &= \langle \boldsymbol{\theta}, \mu A_\kappa \mathcal{J}\rangle \\ \langle (B_0 + B_\kappa)\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}\rangle + \left\langle \left(\frac{1}{\mu_0} N_0 + \frac{1}{\mu} N_\kappa\right)\mathbf{u}, \mathbf{v}\right\rangle &= \left\langle \left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{B}_\kappa\right)\mathcal{J}, \mathbf{v}\right\rangle \end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{0}, \Gamma)$.

Wegen $C_\kappa = -B_\kappa^*$, sowie

$$|\langle \boldsymbol{\lambda}, A_\kappa \boldsymbol{\lambda}\rangle| \geq c\, \|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \qquad \text{für alle } \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, \Gamma)$$

und

$$\langle N_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \kappa^2 \langle \mathsf{R}\mathbf{v}, A_\kappa(\mathsf{R}\mathbf{u})\rangle + \langle V_\kappa(\mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{u}), \mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{v}\rangle$$

ist das Variationsproblem $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, 0, \Gamma)$–elliptisch.

Variationsformulierung

Finde $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{0}, \Gamma)$ mit

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\theta}, (\mu_0 A_0 + \mu A_\kappa)\boldsymbol{\lambda}\rangle + \langle \boldsymbol{\theta}, (C_0 + C_\kappa)\mathbf{u}\rangle &= \langle \boldsymbol{\theta}, \mu A_\kappa \mathcal{J}\rangle \\ \langle (B_0 + B_\kappa)\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}\rangle + \left\langle \left(\frac{1}{\mu_0} N_0 + \frac{1}{\mu} N_\kappa\right)\mathbf{u}, \mathbf{v}\right\rangle &= \left\langle \left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{B}_\kappa\right)\mathcal{J}, \mathbf{v}\right\rangle \end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{0}, \Gamma)$.

Wegen $C_\kappa = -B_\kappa^*$, sowie

$$|\langle \boldsymbol{\lambda}, A_\kappa \boldsymbol{\lambda}\rangle| \geq c\, \|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \qquad \text{für alle } \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, \Gamma)$$

und

$$\langle N_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \kappa^2 \langle \mathsf{R}\mathbf{v}, A_\kappa(\mathsf{R}\mathbf{u})\rangle + \langle V_\kappa(\mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{u}), \mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{v}\rangle$$

ist das Variationsproblem $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, 0, \Gamma)$–elliptisch.

Diskretisierung

1. Konforme Galerkin–Diskretisierung erfordert Ansatzraum $X_h \subset \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma\, 0, \Gamma)$.
2. Nebenbedingung $\mathrm{div}_\Gamma\, \boldsymbol{\lambda} = 0$ mit Lagrange–Multiplikatoren einbauen.

In Operatorschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} A & -B^* \\ B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix}$$

mit der Nebenbedingung $\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} = 0$. Definiere Operator D durch

$$\langle D\boldsymbol{\lambda}, \psi \rangle := \langle \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}, \psi \rangle \quad \text{für alle } \psi \in L_2(\Gamma),$$

dann lautet das Sattelpunktproblem mit Lagrange–Multiplikator $p \in L_2(\Gamma)$

$$\begin{pmatrix} A & -B^* & -D^* \\ B & N & 0 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Operatorschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} A & -B^* \\ B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix}$$

mit der Nebenbedingung $\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} = 0$. Definiere Operator D durch

$$\langle D\boldsymbol{\lambda}, \psi \rangle := \langle \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}, \psi \rangle \quad \text{für alle } \psi \in L_2(\Gamma),$$

dann lautet das Sattelpunktproblem mit Lagrange–Multiplikator $p \in L_2(\Gamma)$

$$\begin{pmatrix} A & -B^* & -D^* \\ B & N & 0 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Addition von $0 = \langle V_0(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}), \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\theta} \rangle$ definiert Operator $\widetilde{A}$ durch

$$\left\langle \boldsymbol{\theta}, \widetilde{A}\boldsymbol{\lambda} \right\rangle := \langle \boldsymbol{\theta}, A\boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle V_0(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}), \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\theta} \rangle$$

Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A} & -B^* & -D^* \\ B & N & 0 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elliptizität von N auf $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ liefert

$$\mathbf{u} = N^{-1}(\mathbf{g}_2 - B\boldsymbol{\lambda})$$

Elliptizität von N auf $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ liefert

$$\mathbf{u} = N^{-1}(\mathbf{g}_2 - B\boldsymbol{\lambda})$$

Schur–Komplement $S := (\widetilde{A} + B^* N^{-1} B)$ ist $\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$–elliptisch

$$\boldsymbol{\lambda} = S^{-1}(\mathbf{g}_1 + B^*\mathbf{g}_2 + D^* p).$$

Elliptizität von N auf $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ liefert

$$\mathbf{u} = N^{-1}(\mathbf{g}_2 - B\boldsymbol{\lambda})$$

Schur–Komplement $S := (\widetilde{A} + B^* N^{-1} B)$ ist $\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$–elliptisch

$$\boldsymbol{\lambda} = S^{-1}(\mathbf{g}_1 + B^* \mathbf{g}_2 + D^* p).$$

Für Lagrange–Mutiplikator folgt

$$DS^{-1}D^* p = -DS^{-1}\mathbf{g}_1 - DS^{-1}B^* N^{-1}\mathbf{g}_2.$$

Wegen $\ker(DS^{-1}D^*) = \ker(D^*) = \mathrm{lin}\,\{1\}$ ist $DS^{-1}D^*$ invertierbar auf $L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $p \in L_2(\Gamma)$
(Stabilisierung von p wie bei Hilfsproblem)

Elliptizität von N auf $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ liefert

$$\mathbf{u} = N^{-1}(\mathbf{g}_2 - B\boldsymbol{\lambda})$$

Schur–Komplement $S := (\widetilde{A} + B^* N^{-1} B)$ ist $\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$–elliptisch

$$\boldsymbol{\lambda} = S^{-1}(\mathbf{g}_1 + B^* \mathbf{g}_2 + D^* p).$$

Für Lagrange–Mutiplikator folgt

$$DS^{-1}D^* p = -DS^{-1}\mathbf{g}_1 - DS^{-1}B^* N^{-1}\mathbf{g}_2.$$

Wegen $\ker(DS^{-1}D^*) = \ker(D^*) = \mathrm{lin}\,\{1\}$ ist $DS^{-1}D^*$ invertierbar auf $L_2(\Gamma)/\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $p \in L_2(\Gamma)$
(Stabilisierung von p wie bei Hilfsproblem)

Konforme Galerkin–Diskretisierung

$$\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathcal{RT}(\Gamma) \subset \mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma), \quad \mathbf{u}_h \in \mathcal{RT}^{\times}(\Gamma) \subset \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma), \quad p_h \in S^0(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathcal{RT}(\Gamma)$, $\mathbf{u}_h \in \mathcal{RT}^{\times}(\Gamma)$ und $p_h \in S^0(\Gamma)$
$\Rightarrow$ quasi–optimale Fehlerabschätzung

Ausblick

- Numerische Beispiele
- Kopplung Wärmeleitung im Leiter (Joule'sche Verluste als Quellterm) mit Grenzschichtmodell für Kühlströmung und Temperatur im Außenraum