

Mirjam Stolper, stolper@num.uni-sb.de

Universität des Saarlandes, Fachrichtung 6.1 - Mathematik, D-66041 Saarbrücken

# Neue Aspekte zur effizienten Lösung der Helmholtz-Gleichung - am Beispiel des Dirichlet-RWPs -



gemeinsame Arbeit mit Prof. Rjasanow,  
Saarbrücken  
im Rahmen eines **BMBF-Projekts**



## Überblick

1. Problembeschreibung
2. Fourier-Methode
3. ACA-Verfahren
4. Numerische Beispiele

# 1. Problembeschreibung

- Das Dirichlet-Außenraumproblem für **die Helmholtz-Gleichung**

$$\begin{aligned}\Delta u(y) + \kappa^2 u(y) &= 0, & y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ u(y) &= g(y), & y \in \Gamma = \partial\Omega,\end{aligned}$$

$u(y)$  genügt der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung.

- Ansatz von Brakhage und Werner:

$$u(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y, \kappa)}{\partial n_x} f(x, \kappa) - i\eta G(x, y, \kappa) f(x, \kappa) dF_x, \quad y \in \Omega^c,$$

wobei  $\eta > 0$  und  $G(x, y, \kappa) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^3$ .

- Die zugehörige Integralgleichung ist für alle Wellenzahlen  $\kappa$  (speziell  $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ) eindeutig lösbar.



## ● Kollokationsverfahren

$$\Gamma \approx \Gamma_h = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j \quad \text{und} \quad f \approx f_h(x, \kappa) = \sum_{j=1}^N \nu_j(\kappa) \varphi_j(x), \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

## ● Das lineare Gleichungssystem:

$$\left( \frac{1}{2}I + B(\kappa) - i\eta A(\kappa) \right) \nu(\kappa) = \varrho, \quad A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad \nu, \varrho \in \mathbb{C}^N,$$

wobei (mit  $r = |x - y_i|$ )

$$a_{ij}(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{e^{i\kappa r}}{r} dF_x, \quad b_{ij}(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{e^{i\kappa r}}{r^3} (i\kappa r - 1) \langle n_x, x - y_i \rangle dF_x,$$

$$(\nu(\kappa))_j = \nu_j(\kappa) \quad \text{und} \quad (\varrho)_i = g(y_i).$$



# 1. Problembeschreibung

## ● Die Aufgabenstellungen:

- Lösungen des Gleichungssystems **für ein Spektrum**

$$0 < \kappa = \frac{\omega}{c} \leq \kappa_{max} \sim \omega_{max}$$

mit  $n_\kappa$  verschiedenen Wellenzahlen. Stabilitätsbedingung:  $h \kappa_{max} \leq 1$

- **Fourier-Methode**  $C(\kappa) = \mathcal{F}_{\xi, \kappa} [\mathcal{F}_{\kappa, \xi}^{-1} [C(\kappa)](\xi)](\kappa)$ .

- Systemmatrizen sind vollbesetzt, unstrukturiert, großdimensioniert  
→ naive Generierung und Lösen mit  $O(N^2)$  für jede Wellenzahl

- **Niedrigrang-Approximation:**

Zu  $C \in \mathbb{C}^{M \times N}$  finde  $C_k \in \mathbb{C}^{M \times N}$  mit

$$\|C - C_k\|_F \leq \varepsilon \|C\|_F \text{ und } Mem(C_k) = Op(C_k x) = O((M + N)k).$$



### ● Die inverse Fourier-transformierte Matrizen

$$\check{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \check{a}_{ij}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\xi} \int_{\Gamma_j} \delta(\xi - r) dF_x,$$

$$\check{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \check{b}_{ij}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^3} \left( r \frac{d}{dz} - 1 \right) \delta(z) \Big|_{z=\xi-r} \langle n_x, x - y_i \rangle dF_x,$$

wobei

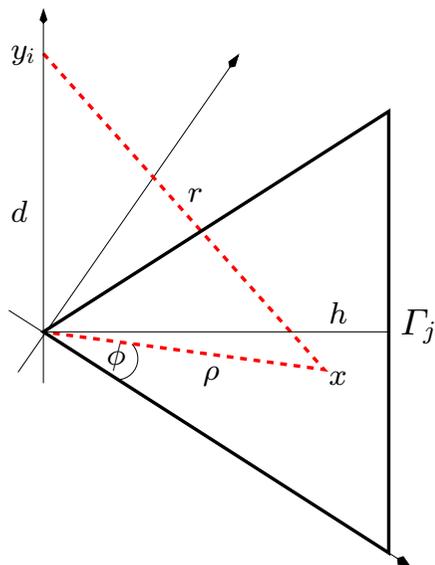
$$\mathcal{F}_{\kappa, \xi}^{-1}[e^{i\kappa r}](\xi) = \delta(\xi - r) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{\kappa, \xi}^{-1}[e^{i\kappa r} (i\kappa r - 1)](\xi) = \left( r \frac{d}{dz} - 1 \right) \delta(z) \Big|_{z=\xi-r}.$$

### ● Die Eigenschaften der Matrizen :

- reellwertig und schwachbesetzt für ein festes  $\xi \in [0, \text{diam}(\Gamma)]$
- jedes Element besitzt lokalen Träger (  $[\xi_{min}, \xi_{max}]$  )
- **analytische Berechnung** für ebene Dreieckselemente mittels einer geeigneten Koordinatentransformation



### ● Analytische Ausdrücke der Matrixeinträge



$$\check{b}_{ii}(\xi) = 0$$

$$\check{b}_{ij}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{\xi^2 - d^2} \frac{h}{\sqrt{\xi^2 - d^2 - h^2}} \mathbb{1}_{[\xi_{min}, \xi_{max}]}(\xi)$$

$$\check{a}_{ij}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \left( \Phi - \arcsin \frac{h}{\sqrt{\xi^2 - d^2}} \right) \mathbb{1}_{[\xi_{min}, \xi_{max}]}(\xi)$$

### ● Bemerkungen:

- $\xi_{min} \geq \xi_0 = \sqrt{d + h}$
- $\check{b}_{ij}(\xi)$  und  $\check{a}_{ij}(\xi)$  besitzen Stammfunktionen  $B_{ij}(\xi)$  und  $A_{ij}(\xi)$
- $\check{b}_{ij}(\xi)$  singularär für  $\xi = \xi_0$

## 2. Fourier-Methode

- Die Fourier-Transformation von  $\check{C} = \check{A}$  bzw.  $\check{C} = \check{B}$  :

$$\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \check{c}_{ij}(\xi) e^{i\kappa\xi} d\xi \approx \tilde{c}_{ij}(\kappa) = \frac{e^{i\kappa\xi_0}}{4\pi} \left( C_{ij}(\xi) \Big|_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} + \sum_{l=1}^{m_p} w_k \bar{c}_{ij}(\xi_l) \text{sinc}(\kappa\xi_l) e^{i\kappa\xi_l} \right).$$

- Das lineare Gleichungssystem

$$\left( \frac{1}{2}I + \tilde{B}(\kappa) - i\eta\tilde{A}(\kappa) \right) \nu(\kappa) = \varrho$$

- Bemerkungen:

- Polynomordnung  $m_p$  klein
- $A_{ij}(\xi)$  und  $\bar{a}_{ij}(\xi)$  bzw.  $B_{ij}(\xi)$  und  $\bar{b}_{ij}(\xi)$  sind unabhängig von  $\kappa$
- insbesondere  $\tilde{b}_{ii}(\kappa) = 0$



### 3. ACA-Verfahren

#### ● ACA-Verfahren (Adaptives Cross Approximation)

(Bebendorf, Rjasanow: Adaptive low-rank approximation of collocation matrices,  
*Computing*, 70(1);1-24, 2003)

- Theoretische Ergebnisse nur für asymptotisch glatte Kerne
- !! Formale Anwendung des Algorithmus für degenierte Kerne, die nicht asymptotisch glatt sind → Helmholtz-Operator !!

#### ● Approximation der Matrix:

- Konstruktion des Cluster-Baumes
- Bestimmung der zulässigen Cluster-Paare

$$\max(\text{diam}(D_1), \text{diam}(D_2)) \leq \gamma \text{dist}(D_1, D_2), \quad 0 < \gamma < 1$$

- Approximation der Blöcke



### 3. ACA-Verfahren

#### ● ACA-Verfahren mit vollständiger Pivotisierung

- $R_0 = C, C_0 = 0.$
- Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  solange  $\|R_k\|_F > \varepsilon \|C\|_F$
- $(R_k)_{i_{k+1}, j_{k+1}} = \max_{i,j} |(R_k)_{ij}|$  und  $\gamma_{k+1} = \frac{1}{(R_k)_{i_{k+1}, j_{k+1}}}$
- $R_{k+1} = R_k - \gamma_{k+1} (R_k e_{j_{k+1}}) (e_{i_{k+1}}^T R_k)^*$
- $C_{k+1} = C_k + \gamma_{k+1} (R_k e_{j_{k+1}}) (e_{i_{k+1}}^T R_k)^*$



### 3. ACA-Verfahren

#### ● ACA-Verfahren mit einer partiellen Pivotisierung

- $C_0 = 0, i_1 := 1.$

- Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  solange  $\|u_k\|_F \|v_k\|_F > \varepsilon \|C_k\|_F$

- $$e_{i_{k+1}}^T R_k = e_{i_{k+1}}^T C - \sum_{l=1}^k (u_l)_{i_{k+1}} v_l^*$$

- $(R_k)_{i_{k+1}, j_{k+1}} = \max_j |(R_k)_{i_{k+1}, j}|$  und  $v_{k+1} = e_{i_{k+1}}^T R_k / (R_k)_{i_{k+1}, j_{k+1}}$

- $$u_{k+1} = C e_{j_{k+1}} - \sum_{l=1}^k u_l (v_l)_{j_{k+1}}^*$$

- $i_{k+2} = \operatorname{argmax}_{i \neq i_{k+1}} |(u_{k+1})_i|$

- $C_{k+1} = C_k + u_{k+1} v_{k+1}^*$

- Berechnung von  $\|C_k\|_F$ :

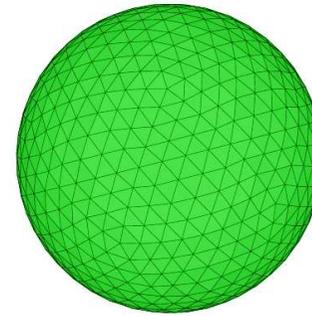
$$\|C_k\|_F^2 = \|C_{k-1}\|_F^2 + 2 \sum_{l=1}^{k-1} u_k^* u_l v_l^* v_k + \|u_k\|_F^2 \|v_k\|_F^2.$$



## 4. Numerische Beispiele

- Streuproblem an der schallweichen Einheitskugel

$$u^I(y) = e^{i\kappa d^T y}, \quad d = (1, 0, 0)^T.$$



( $N = 1280$ )

- Randintegralgleichung

$$\left( \frac{I}{2} + B - i\eta A \right) \nu = -e^{i\kappa d^T y}, \quad \eta > 0,$$

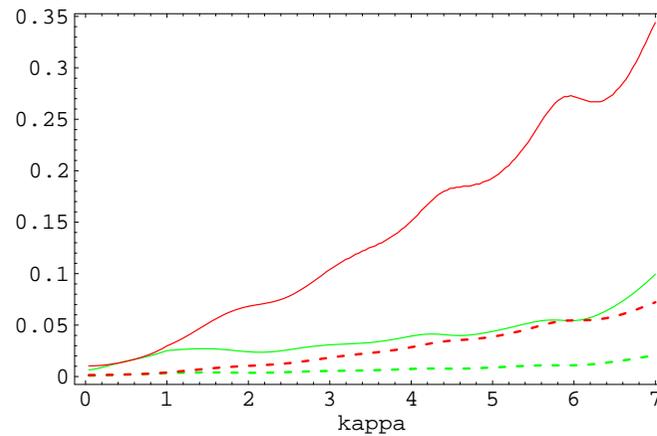
- die analytische Lösung

$$\nu(y, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n + 1) \frac{j_n(\kappa)}{i\kappa(\kappa j_n'(\kappa) - i\eta j_n(\kappa)) h_n^{(1)}(\kappa)} P_n(d^T y).$$

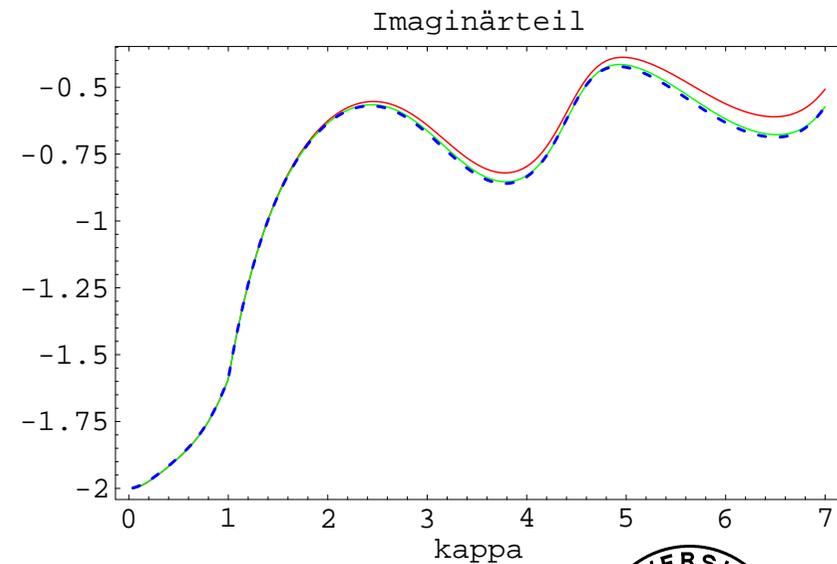
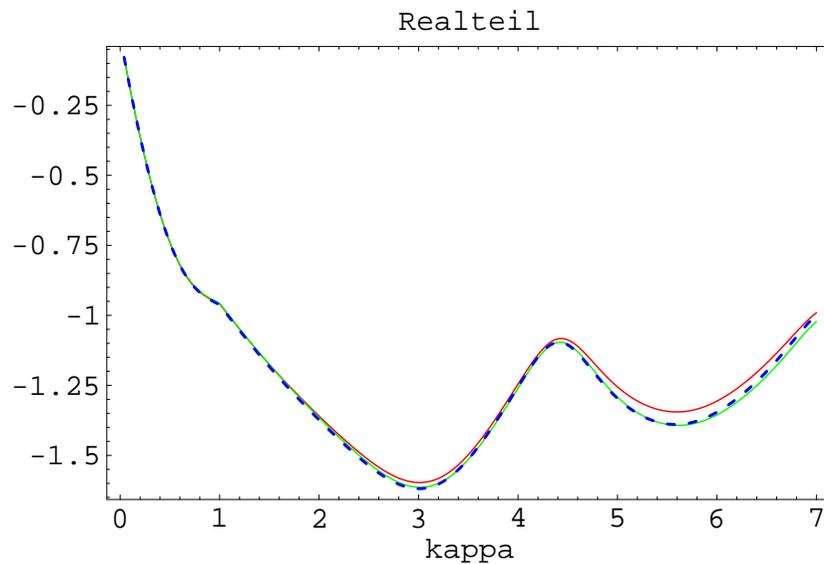
- Die Lösungen mit Standardtechniken  $\nu_{ST}$  und Fouriemethode  $\nu_{FT}$ .

## 4. Numerische Beispiele

- $L_2$  Fehler und relativer Fehler der Lösungen  $\nu_{ST}$ ,  $\nu_{FT}$  ( $N = 1280$ )



- die Lösungen  $\nu(\kappa)$ ,  $\nu_{ST}$ ,  $\nu_{FT}$  ( $N = 1280$ )



## 4. Numerische Beispiele

- **ACA-Verfahren** mit partieller Pivotisierung,  $\varepsilon = 10^{-4}$
- Kompressionsfaktor  $KF := \frac{Mem(\text{Approximant})}{Mem(\text{Original Matrix})}$
- **Feste Wellenzahl**  $\kappa = \pi/2$

$N$	$\kappa h$	$KF$ (%)	$\ \nu - \nu_{FT}\ _{\mathbb{L}_2}$	$\ \nu - \nu_{FT}\ _{\mathbb{L}_2} / \ \nu\ _{\mathbb{L}_2}$	# It.
80	0.97	100	3.91E-01	6.14E-02	5
320	0.51	93	1.07E-01	1.62E-02	5
1280	0.247	46	2.75E-02	4.09E-03	5
5120	0.13	18	6.96E-03	1.03E-03	5
20480	0.065	6	1.93E-03	2.86E-04	4

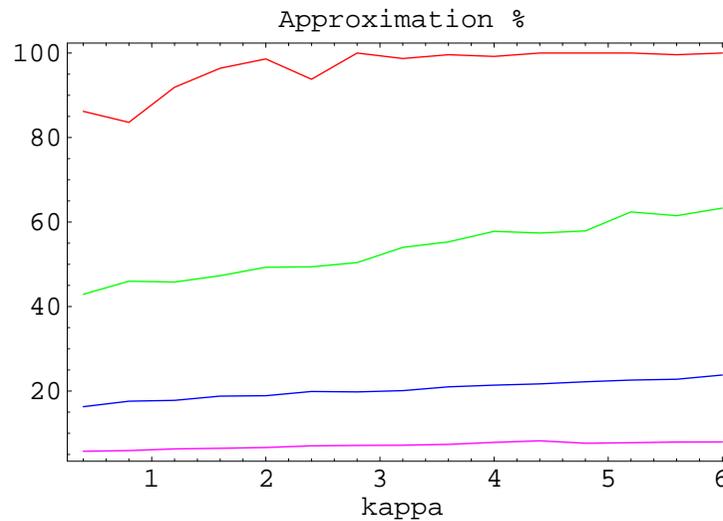


## 4. Numerische Beispiele

### Variable $\kappa$ mit $\kappa \cdot h \approx 0.25$

$N$	$\kappa$	$\kappa h$	$KF$ (%)	$\ \nu - \nu_{FT}\ _{\mathbb{L}_2}$	$\ \nu - \nu_{FT}\ _{\mathbb{L}_2} / \ \nu\ _{\mathbb{L}_2}$	# It.
80	0.4	0.247	100	2.24E-01	3.17E-02	4
320	0.76	0.247	87	8.22E-01	1.10E-02	5
1280	1.5	0.247	46	2.75E-01	4.09E-03	5
5120	3.0	0.248	20	8.42E-02	1.49E-03	6
20480	6.0	0.248	8	1.93E-02	3.87E-03	7

### $KF$ in Abhängigkeit der Wellenzahl

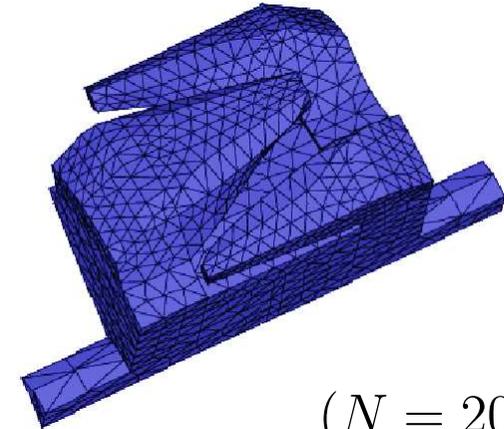


## 4. Numerische Beispiele

- Randintegralgleichung - Green'sche Darstellung

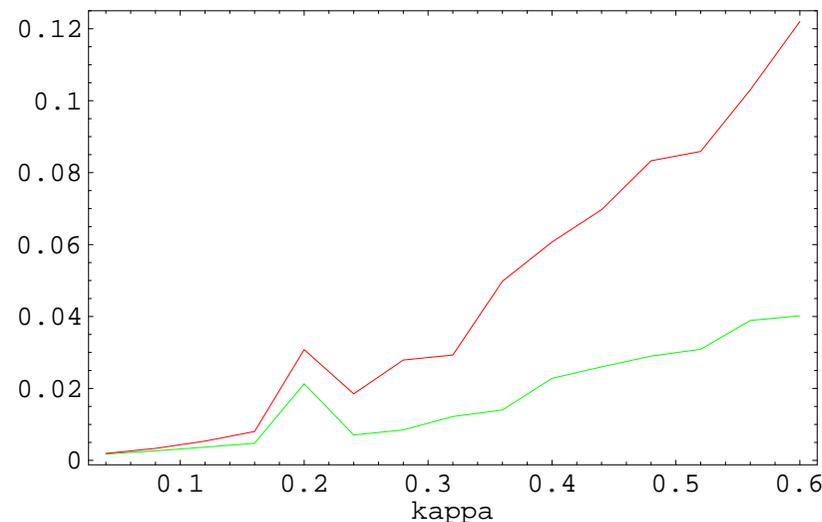
$$Af = \left( -\frac{I}{2} + B \right) w .$$

- Die analytische Lösung  $f(\kappa) = \frac{\partial}{\partial n_x} w(\kappa)$ .  
mit  $w = G(x, y_0, \kappa)$  mit  $y_0 \in \Omega$  und  $x \in \Gamma$



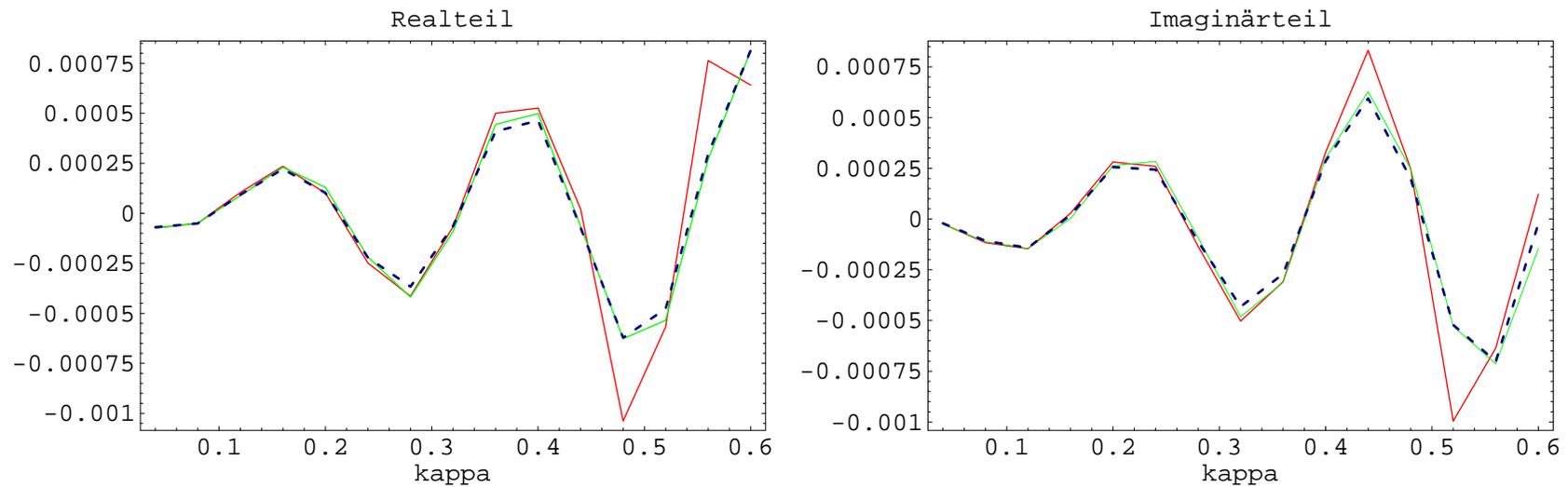
( $N = 2068$ )

- $L_2$  Fehler der Lösungen  $f_{ST}$ ,  $f_{FT}$

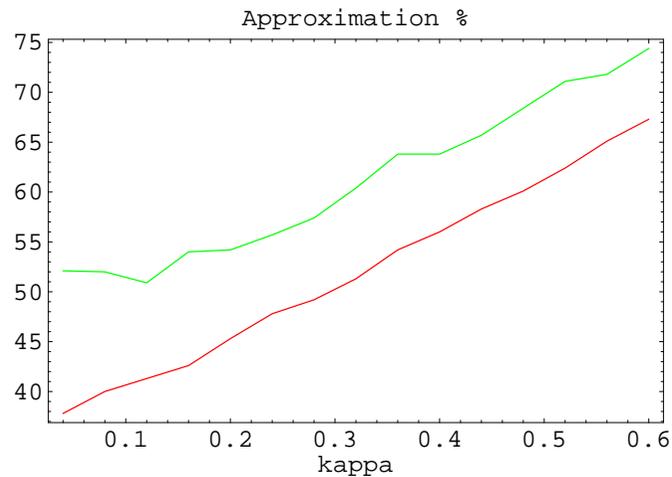


## 4. Numerische Beispiele

### ● Außenraumproblem - die Lösungen $f$ , $f_{ST}$ , $f_{FT}$



### ● $KF$ in Abhängigkeit der Wellenzahl



- Fourier-Methode für die Generierung der Kollokationsmatrizen
  - analytische Berechnung der reellen und schwachbesetzten Matrizen
  - effiziente Generierung der "neuen" Systemmatrizen für beliebige Wellenzahlen
- Anwendung des ACA-Verfahrens auf die Kollokationsmatrizen
- gute Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit den analytischen Werten

